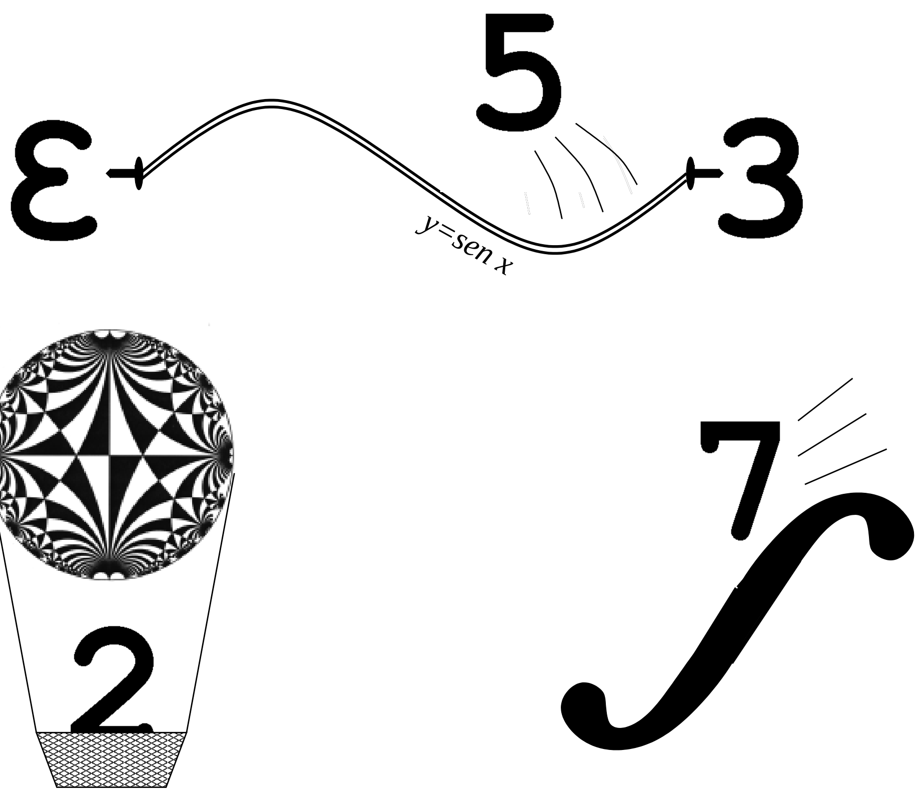
Métodos Analíticos en Teoría de Números



Fernando Chamizo Lorente

2002

En estas notas mostraremos algunas de las pinceladas que conforman la teoría analítica de números. Veremos en particular, la teoría multiplicativa que rodea a la demostración del teorema de los números primos, y la estimación de sumas trigonométricas. Además, completaremos los dos últimos capítulos con aplicaciones a diversos problemas aritméticos.

Índice

0. Notación y preliminares

§1. Hablando del infinito 1

§2. Aprendiendo a sumar 2

§3. Cosas que deberíamos saber 5

1. El teorema de los números primos

§1. Un poco de historia 7

§2. Diversas formas del teorema de los números primos 8

§3. Un ejemplo de Cálculo I que se complica 10

§4. La extensión meromorfa y la ecuación funcional 12

§5. Fórmulas mágicas y productos infinitos: el poder de la Variable Compleja 14

§6. La fórmula explícita 16

§7. ¿Qué podemos probar con la hipótesis de Riemann? 19

§8. ¿Qué podemos probar sin la hipótesis de Riemann? 21

§9. Primos en progresiones aritméticas 22

2. La estimación de sumas trigonométricas

§1. Introducción y dos principios principales: incertidumbre y fase estacionaria . . 27

§2. La acotación básica de van der Corput 31

§3. El truco de Weyl (y van der Corput) 35

§4. Pares de exponentes. Un bonito envoltorio para un dolor de cabeza 36

§5. Gran criba y sumas raras 41

§6. Introducción a otros métodos 46

3. Algunas aplicaciones

§1. Problemas de puntos del retículo 51
La máquina de hacer regularizaciones 51
Puntos bajo gráficas 52
Los problemas del círculo y del divisor 54

§2. Partes fraccionarias de polinomios 57
Sucesiones equidistribuidas 58
Funciones polinómicas y equidistribución 59
Aproximación diofántica 60

§3. Volviendo al teorema de los números primos 63
De nuevo la variable compleja 63
Una serie que no converge pero es útil 65
El término de error mejorado 66

Referencias

[Be] B.C. Berndt, R.A. Rankin. Ramanujan: letters and commentary. History of mathematics 9. American Mathematical Society, 1995.

[Ci-Co] F.J. Cilleruelo, A. Córdoba. La teoría de los números. Biblioteca Mondadori 27. Mondadori 1992.

[Da] H. Davenport. Multiplicative number theory (2nd ed.). Graduate texts in Mathematics 74. Springer, 1980.

[Dy-Mc] H. Dym, H.P. McKean. Fourier series and integrals. Academic Press, 1972.

[Ed] H.M. Edwards. Riemann's zeta function. Pure and applied Mathematics 58. Academic Press, 1974.

[El] W.J. Ellison, M.M. France. Les nombres premiers. Actualits scientifiques et industrielles 1366. Hermann, cop. 1975.

[Ga] C.F. Gauss. Mathematisches Tagebuch, 1796-1814. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1976.

[Gr-Ko] S.W. Graham, G. Kolesnik. Van der Corput's method of exponential sums. London Mathematical Society lecture note series 126. Cambridge University Press, 1991.

[Gr-Ry] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. Table of integrals, series and products. Academic Press, 1994.

[Ha] G.H. Hardy. The average of the functions $P(x)$ and $\Delta(x)$. Proc. London Math. Soc. (2) 15, 192-213 (1916).

[Ha-Wr] G.H. Hardy, E.M. Wright. An introduction to the theory of numbers. Clarendon Press, 1979.

[Hu] M.N. Huxley. Area, Lattice Points, and Exponential Sums. Clarendon Press. Oxford 1996.

[Iv] A. Ivić. The Riemann zeta-function: the theory of the Riemann zeta-function with applications. Wiley 1985.

[Ka] A.A. Karatsuba. Fundamentos de la teoría analítica de los números. Editorial Mir, 1979.

[Li] M.J. Lighthill. Fourier Analysis and Generalised Functions. Cambridge University Press, 1970.

[Mo] H.L. MONTGOMERY. Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. Regional conference series in mathematics 84. American Mathematical Society, 1994.

[Se] A. SELBERG. Collected papers. Springer-verlag, 1989.

[Sm] D.E. SMITH. A source book in Mathematics. Dover Publications, 1959.

[So] C.D. SOGGE. Fourier integrals in classical analysis. Cambridge tracts in Mathematics 105. Cambridge University Press, 1993.

[Sp] M. SPIVAK. Calculus. Reverté, D.L. 1981.

[Ti] E.C. TITCHMARSH. The theory of the Riemann zeta-function (2nd ed.). Clarendon, 1986.

[Va] R.C. VAUGHAN. The Hardy-Littlewood method. Cambridge tracts in Mathematics 80. Cambridge University Press, 1981.

[We] H. WEYL. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. 77, 313-352 (1916).

[Yn] F.J. YNDURÁIN. Mecánica cuántica. Alianza Universidad Textos. Alianza, 1988.

[Za] A. ZAHARESCU. Small values of $n^2\alpha \pmod 1$. Invent. Math. 121, 379–388 (1995).