

Resumen del Capítulo 3

1. Teorema de Dirichlet

¿Cuáles son los resultados importantes?

- Teorema de Dirichlet.
- $a/b < c/d$ fracciones de Farey consecutivas $\Rightarrow bc - ad = 1$.
- a_n/b_n fracciones distintas $\lim b_n |\alpha - a_n/b_n| = 0 \Rightarrow \alpha$ irracional.
- a_n/b_n fracciones distintas $\lim b_n^k |\alpha - a_n/b_n| = 0 \Rightarrow \alpha$ no es raíz de un polinomio de grado k en $\mathbb{Z}[x]$.
- Criterio de Weyl y su aplicación a que $a_n = \text{Frac}(n\alpha)$ está equidistribuida para $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

¿Qué se espera de mí? Sobre todo que aprendas las propiedades básicas de aproximación diofántica. En pocas palabras, que todo número se puede aproximar por racionales con un error menor que el inverso del cuadrado del denominador (teorema de Dirichlet). Del hecho de que un número se pueda aproximar bien por infinitos irracionales se deduce que es irracional, y si el error decrece extraordinariamente rápido, que es trascendente. Debes saber aplicar esto en ejemplos sencillos, como los problemas 122 o 128. Los razonamientos elementales o las propiedades básicas, son suficientes para hacer el resto de los ejemplos marcados hasta el 127.

Otro resultado importante es que la parte decimal de los múltiplos de un irracional se comporta como una sucesión “al azar” en $[0,1]$ (equidistribuida). Ejemplos típicos son los ejercicios 132 y 133, mientras que el 135 es ligeramente más complicado.

2. Fracciones continuas

¿Cuáles son los resultados importantes?

- Las convergentes consecutivas son fracciones de Farey consecutivas (de algún orden).
- Si p_n/q_n es la n -ésima convergente de $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ entonces $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ y $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.
- La fracción continua de $\alpha \in \mathbb{R}$ es finita $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$.
- La fracción continuas infinita asociada a un $\alpha \notin \mathbb{Q}$, converge a α .

- Si p_n/q_n es la n -ésima convergente de α entonces es la mejor aproximación de α por una fracción de denominador (positivo) menor o igual que q_n .
- Si el error al aproximar α por a/b es menor que $1/(2b^2)$, entonces a/b es una convergente de α .

¿Qué se espera de mí? En primer lugar, que aprendas el algoritmo que asocia a cada número real la fracción continua que converge a él. Después, que conozcas y sepas usar las propiedades básicas señaladas en el apartado anterior. Con ambas cosas se pueden resolver los ejercicios marcados. Algunos son puramente computacionales, como los ejercicios 139, 144 y 152. Otros, como el 140 o el 141, sólo requieren manipulaciones algebraicas.