

Resumen del Capítulo 2

1. Ley de reciprocidad cuadrática

¿Cuáles son los resultados importantes?

- Criterio de Euler.
- Ley de reciprocidad cuadrática.

¿Qué se espera de mí? Lo más importante es que sepas el enunciado de la ley de reciprocidad cuadrática y cómo aplicarla para decidir si un número es residuo cuadrático. Para reducir los cálculos intermedios, muchas veces es conveniente emplear la generalización de Jacobi del símbolo de Legendre. Los problemas del 66 al 68 o del 72 al 74 deben convertirse en pura rutina. En general, se aconsejan como representativos todos los ejercicios del 63 al 68 y del 72 al 79.

2. Enteros algebraicos e ideales

¿Cuáles son los resultados importantes?

- Los enteros algebraicos forman un anillo.
- $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ con $d \neq 1$ libre de cuadrados, es $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ y $\mathbb{Z}[1, (1 + \sqrt{d})/2]$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$.
- En $\mathbb{Z}[i]$ hay factorización única.
- Teorema de factorización en anillos cuadráticos.

¿Qué se espera de mí? Que aprendas la definición de entero algebraico y que recuerdes los anillos de enteros de los cuerpos cuadráticos. Con ello puedes hacer los ejercicios 82, 83, 84, 87, 88 y 89. Uno de los ejemplos más relevantes son los enteros gaussianos $\mathbb{Z}[i]$. Hay que saber cómo factorizar en ellos y cómo aprovechar esta factorización para expresar un número como suma de dos cuadrados. Aparte de los ejemplos de clase, uno puede practicar con los ejercicios 90 y del 102 al 105.

Referente a los ideales, debes conocer los conceptos de ideal primo y principal, y su relación con la factorización única. Algunas manipulaciones básicas con ideales se requieren en los problemas 92 a 94 y 101. Los ejercicios 98 y 99 sirven para poner en práctica la factorización en anillos cuadráticos.

3. Representación por formas cuadráticas

¿Cuáles son los resultados importantes?

- Fórmula para el número de clases en el caso $d < -3$, $d \not\equiv 1 \pmod{4}$.

¿Qué se espera de mí? Que sepas calcular el número de representaciones de n como $x^2 - dy^2$, $d < 0$, en los casos con número de clases pequeño. Obviamente es importante entender el concepto de número de clases. La relación general entre ideales y representaciones se remarca en los problemas 108, 109 y 110, mientras que los problemas del 111 al 114 son más concretos.