Resumen del Capítulo 1

1. Repaso de congruencias y divisibilidad

¿Cuáles son los resultados importantes?

- Teorema fundamental de la aritmética.
- Algoritmo de Euclides (e identidad de Bezout).
- Teorema chino del resto.
- Pequeño teorema de Fermat y congruencia de Wilson: $(p-1)! \equiv -1\ (p)$.

¿Qué se espera de mí? Que recuerdes el lenguaje de las congruencias. Para ser más concretos que repases la parte correspondiente de la asignatura de Conjuntos y Números hasta que problemas como el 2, 3, 5, 7, 8, 11 y 14 te resulten fáciles. Muchas veces la diferencia entre considerar algunas cuestiones elementales de divisibilidad como "de idea feliz" o considerarlas fáciles, es haber hecho N problemas. Si los de la lista te resultan pocos, consigue $N+K$ empleando la bibliografía o los de Conjuntos y Números.

2. Raíces primitivas

¿Cuáles son los resultados importantes?

- Congruencia de Euler-Fermat ($(m,a)=1 \Rightarrow a^{\phi(m)} \equiv 1\ (m)$).
- Teorema de existencia de raíces primitivas (existen raíces primitivas módulo m si y sólo si $m = 2, 4, p^\alpha$ ó $2p^\alpha$ con p primo impar).

¿Qué se espera de mí? Que aprendas (o repases la congruencia de Euler-Fermat). Que conozcas la definición de raíz primitiva y que sepas desenvolverte en $\mathbb{Z}_m^*$ (las unidades de $\mathbb{Z}_m$) usando los rudimentos de la teoría de grupos (esto puede que exija repaso de resultados como el teorema de Lagrange o el de clasificación de grupos abelianos finitos).

Ejercicios como el 22, 24 ó 25 deberían convertirse en mecánicos, y otros más teóricos como el 23 o el 28, no tendrían que requerir gran esfuerzo.

3. Funciones aritméticas

¿Cuáles son los resultados importantes?

- f multiplicativa $\Rightarrow F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ multiplicativa.
- $F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(n/d)$.
- f multiplicativa $\Rightarrow D_f(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$ donde $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.
- $D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$.

¿Qué se espera de mí? Lo más importante es reconocer que una función multiplicativa queda determinada por sus valores en potencias de primos. Con ello debes poder dar fórmulas "explícitas" para muchas funciones aritméticas multiplicativas. Respecto a las series de Dirichlet asociadas a funciones aritméticas, tienes que entenderlas como un instrumento que (aparte de sumar algunas series espectaculares) permite tratar de manera cómoda algunas operaciones con funciones aritméticas, como la convolución $\sum_{d|n} f(d)g(n/d)$ que corresponde a $D_f(s)D_g(s)$.

Algunos problemas representativos para practicar, son: 33, 34, 35, 36, 37, 49, y para las series de Dirichlet 53 y 54 (recordando que $\zeta(s)$ es $D_1(s)$, una de las series de Dirichlet más sencillas).

4. Función zeta y distribución de los primos

¿Cuáles son los resultados importantes?

- Prueba de Euler de la infinitud de los primos.
- Enunciado del teorema de los números primos.
- Enunciado del postulado de Bertrand.

¿Qué se espera de mí? Esta sección es fundamentalmente descriptiva; basta con entender el enunciado de los resultados que se citan. Después de ello, los problemas 50, 51 y 57 no deberían resultar difíciles.