Teorema de Dirichlet

117. Demostrar que $\sqrt[5]{33}-\sqrt{3}$ es irracional. *Indicación*: Hay una demostración breve usando que $\sqrt[5]{33}$ y $\sqrt{3}$ son enteros algebraicos.

118. Demostrar que el logaritmo decimal de un racional positivo, o bien es entero o bien es irracional.

119. Hallar tres fracciones a/b tales que $|\sqrt{6}-a/b|<b^{-2}$.

120. Si escribimos la serie de Farey de orden 100, ¿qué fracción estará a la derecha de 17/31? ¿y a la izquierda?

121. Si $a/b<c/d<e/f$ son fracciones de Farey consecutivas, probar que $c/d=(a+e)/(b+f)$.

122. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-1}2^{-n!}$ son irracionales.

123. Dado $N\ge 4$, para cada fracción irreducible a/q con $1\le q\le\sqrt{N}$ se considera el intervalo $I_{a/q}=\{x\ :\ |x-a/q|<1/(qN)\}$. Demostrar que dichos intervalos son disjuntos.

124. Considérese $\alpha=e^{(-1+\sqrt{5})/4}\cos\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)+e^{(-1-\sqrt{5})/4}\cos\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)$. Sabiendo $\cos(2\pi/5)=(\sqrt{5}-1)/4$, deducir $2\alpha=e^{\zeta}+e^{\zeta^2}+e^{\zeta^3}+e^{\zeta^4}$ con $\zeta=e^{2\pi i/5}$ y utilizar esta fórmula para probar que α es irracional.

125. Demostrar que $a_n=(1+3\sqrt{2}/4)(1+\sqrt{2})^n+(1-3\sqrt{2}/4)(1-\sqrt{2})^n$ es entero para todo $n\in\mathbb{Z}^+$ y que $|\sqrt{2}-1-a_n/a_{n+1}|<a_{n+1}^{-2}$. *Indicación*: Utilizar que $(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n$ es un múltiplo par de $\sqrt{2}$.

126. Sean $\alpha=0'1234567891011\dots$ y $\beta=0'235711131719\dots$ (las cifras decimales vienen dadas por los naturales y por los primos, respectivamente). Demostrar que α y β son irracionales. *Indicación*: Basta ver que no son decimales periódicos. La demostración es una variación del caso periódico puro.

127. Demostrar que $\pi+e$ y πe no pueden ser ambos racionales (Nota: Todavía no se conoce si alguno de ellos lo es). Demostrar que al menos uno de ellos es trascendente.

128. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n^n}$ es trascendente.

129. Demostrar que las series $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}\mathrm{cosec}(2\pi n\sqrt{2})$ y $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-5}\mathrm{cosec}(2\pi n\sqrt[3]{2})$ convergen. *Indicación*: Emplear que para $|x|\le 1/2$ se cumple $|\operatorname{sen}(\pi x)|\ge|x|$, y que $2\sqrt{2}$ y $2\sqrt[3]{2}$ son números algebraicos de grados 2 y 3, respectivamente.

130. Demostrar que la parte fraccionaria de $n!e$ no está equidistribuida.

131. Demostrar que la parte fraccionaria de $(1+3\sqrt{2}/4)(1+\sqrt{2})^n$ no está equidistribuida. *Indicación*: Emplear un problema anterior.

132. Demostrar que si α es irracional entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que la parte fraccionaria de $n\alpha$ tiene un 3 en el lugar 1000. Probar también que casi todo $0 < x < 1$ (en el sentido de la medida) contiene la cifra 7 en su desarrollo decimal.

133. El código ASCII, empleado en informática, asigna a cada número $0 \le n < 256$ un carácter (o símbolo gráfico o de control). Así, utilizando base 256 podemos "leer" cada número $0 < x < 1$. Por ejemplo, $\log \frac{35}{27} = \frac{66}{256} + \frac{111}{256^2} + \frac{83}{256^3} + \frac{97}{256^4} + \dots \to$ BoSa.... Demostrar que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que la parte fraccionaria de $n\pi$ comienza con el texto completo de "El Quijote". Probar que casi todo $x \in (0,1)$ contiene todos los libros del mundo. *Indicación*: Proceder como en el problema anterior.

134. Sea $L(n)$ la parte fraccionaria de $\log n$. Dar una fórmula aproximada para el cardinal de los $1 \le n \le N$ tales que $L(n) < 1/2$ y deducir que $L(n)$ no está equidistribuida.

135. En el primer examen saco un $8|\operatorname{sen} 3|$, en el segundo $8|\operatorname{sen} 6|$, en el tercero $8|\operatorname{sen} 9|$ y así sucesivamente. Demostrar que si el número de exámenes es suficientemente grande la media me saldrá aprobado.

Tres de geometría de números

136. Se dice que un punto $P \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ es *visible* (desde el origen) si el segmento que une el origen $O = (0,0)$ con P no contiene otros puntos de $\mathbb{Z}^2$. Y se dice que dos puntos $P, Q \in \mathbb{Z}^2 - \{O\}$ son *consecutivos* si son visibles y determinan un triángulo OPQ que no contiene (ni en su borde ni en su interior) otros puntos de $\mathbb{Z}^2$.

a) Demostrar que un punto es visible si y sólo si sus coordenadas son coprimas.

b) Sabiendo que un paralelogramo de área $A \ge 2$ y vértices en $\mathbb{Z}^2$ siempre contiene algún otro punto de $\mathbb{Z}^2$, demostrar que $P = (a,b),\ Q = (c,d) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ con $0 \le a \le b$, $0 \le c \le d$ son consecutivos si y sólo si a/b y c/d son fracciones de Farey consecutivas (para algún N). *Indicación*: El área del triángulo OPQ es $|ad - bc|/2$.

c) Sean P y Q consecutivos. Probar que en el triángulo OPQ la altura trazada por P mide $1/|OQ|$.

137. Un bosque circular tiene radio 100 y árboles de radio $0'005$ situados en los puntos de coordenadas enteras. Utilizar el problema anterior para probar que los árboles que podemos ver desde el origen son exactamente los correspondientes a puntos visibles. Demostrar también que si el bosque fuera ilimitado, a partir de cierta distancia "los árboles no nos dejarían ver el bosque".(Nota: La generalización de este ejercicio es lo que se llama "problema del huerto").

138. Dado un punto visible P en el segundo cuadrante y un entero N mayor que el producto de sus coordenadas, demostrar que existe un punto del primer cuadrante $Q \in \mathbb{Z}^2$ tal que el paralelogramo determinado por OP y OQ tiene área N.

Fracciones continuas

139. Hallar las fracciones continuas de $\sqrt{5}$ y de $\sqrt{11}$.

140. Hallar el valor de los números reales cuyas fracciones continuas son $[\overline{2,3}]$, $[1,1,\overline{1,4}]$ y $[5,\overline{2,10}]$.

141. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, demostrar que $\sqrt{n^2+1} = [n,\overline{2n}]$ y que $\sqrt{n(n+1)} = [n,\overline{2,2n}]$.

142. ¿Cuál es la fracción continua de $(n + \sqrt{n^2+4})/2$ con $n \in \mathbb{Z}^+$?

143. Sean a y b coprimos y sea p_{n-1}/q_{n-1} la penúltima convergente de a/b, demostrar que $(x,y) = \pm(q_{n-1}, -p_{n-1})$ es una solución de $ax + by = \pm 1$. Utilizar este método para resolver $19x + 12y = 1$.

144. Con la ayuda de una calculadora, hallar las cinco primeras convergentes de $\pi + e$ y estimar el error cometido.

145. Escogiendo un número real "al azar"en el intervalo $(0, 1)$, ¿cuál es la probabilidad de que el primer coeficiente (no nulo) de su fracción continua tenga tres cifras?

146. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ raíces de un polinomio $P \in \mathbb{Z}[x]$ de segundo grado. Demostrar que si $\alpha_1 = [\overline{a, b, c, d}]$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$, entonces $-1/\alpha_2 = [\overline{d, c, b, a}]$. *Indicación*: Comenzar demostrando que la ecuación $P(x) = 0$ equivale a $x = [a, b, c, d + 1/x]$.

147. Además de los resultados que le han hecho famoso, E. Galois realizó algún otro trabajo matemático de calidad menor, entre ellos el problema anterior, que utilizó como prueba de que: "Si una de las raíces de un polinomio de grado arbitrario [con coeficientes enteros] es una fracción continua inmediatamente periódica, dicho polinomio tendrá otra raíz igualmente periódica dada por la unidad negativa entre la misma fracción continua escrita en orden inverso". Dar una demostración rigurosa de este teorema de Galois.

148. Utilizar el resultado anterior para calcular la fracción continua de $(\sqrt{6} - 1)/2$ sin usar la calculadora partiendo de que $(\sqrt{6} + 1)/2 = [\overline{1, 1, 2, 1}]$.

149. Arquímedes aproximó π por $22/7$. Hallar la fracción con denominador mínimo que mejora la aproximación de Arquímedes.

150. ¿Cuál es la mejor aproximación racional de e^2 con denominador menor que 20?

151. Demostrar que si $x, y > 0$ es una solución en enteros de $x^3 - dy^3 = 1$ con $d \geq 5$, entonces x/y es una convergente de $\sqrt[3]{d}$. Utilizar este hecho para hallar una solución de $x^3 - 17y^3 = 1$. *Indicación*: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ para $a \in \mathbb{R}$.

152. Un año solar dura $365'24223379\ldots$ días, pero el calendario oficial le asigna 365 días añadiendo 97 nuevos días cada 400 años, correspondiendo a los años bisiestos. Mejorar la aproximación oficial usando fracciones continuas. (Nota: En 400 años sólo hay 97 bisiestos, porque se suprime uno cada 100 años excepto si el número de siglo es divisible por 4).

153. Sea A una matriz 2×2 con autovalores distintos λ_1, λ_2 y autovectores correspondientes $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$. Demostrar que $\vec{v}_n = C_1 \lambda_1^n \vec{w}_1 + C_2 \lambda_2^n \vec{w}_2$, donde C_1, C_2 son constantes arbitrarias, es la solución general de la ecuación recurrente $\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n$. Utilizar este hecho para hallar una fórmula explícita para las convergentes de $\sqrt{2} - 1 = [0, \overline{2}]$.

154. Los *números de Fibonacci* son los términos de la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ que satisface $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Demostrar que f_{n+2}/f_{n+1} es la n-ésima convergente de la razón aúrea $(1 + \sqrt{5})/2$. Utilizar el problema anterior para hallar una fórmula explícita para f_n.