Teoría de Números

Septiembre 2005

1) Sabiendo que la factorización en primos de 325515 es $3 \cdot 5 \cdot 21701$, hállese el número de soluciones de $x^7 = 21702$ en $\mathbb{Z}_{325515}$.

2) Considérese el número $\alpha = 1/1! + 1/6! + 1/11! + 1/16! + \ldots$.

a) Pruébese que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

b) Suponiendo conocido el apartado anterior, pruébese que existen infinitos enteros n y m, tales que $|n\alpha - \pi - m|$ es menor que 10^{-1000}.

c) Demuéstrese que $\alpha^{10} - 7\alpha$ y $\alpha - 5\alpha^{10}$ no son simultáneamente racionales.

3) Sabiendo que el anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$ tiene grupo de clases isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ y que está generado por la clase de $I = \langle 3, 1 + \sqrt{-17}\rangle$ con $\langle 3 \rangle = I \cdot \overline{I}$, hallar el número de soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de $x^2 + 17y^2 = 3^{4n}$ cuando $n \in \mathbb{Z}^+$.

4) Indíquese razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El punto $(2, 3)$ en la curva elíptica $E : y^2 = x^3 + 1$, tiene orden 3.

b) Existe una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$ en forma canónica en la que al sumar $(1, 1)$ y $(2, 2)$ se obtiene $(-2, 2)$.

c) Existe una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$ en forma canónica en la que $(13, 0)$ tiene orden 7.