Teoría de Números

Febrero 2005

1) Sea $p > 5$ un número primo tal que $p \equiv 1\ (5)$.
a) Calcular el número de raíces de $x^5 - 1$ en $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^2}$ y $\mathbb{Z}_{p^{100}}$.
b) Calcular el número de raíces de $4x^2 + 6x + 1$ en $\mathbb{Z}_p$.
c) Probar que $x^5 \equiv 2\ (11^{2005})$ no tiene solución.

2) Sea $\mathcal{O}$ el anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$ y considérese el ideal $I = \langle 3, 1 + \sqrt{-17}\rangle$ en $\mathcal{O}$.
a) Sea el ideal conjugado $\overline{I} = \langle 3, 1 - \sqrt{-17}\rangle$. Probar que $I \cdot \overline{I}$ es principal dando un generador suyo.
b) Sabiendo que el grupo de clases de $\mathcal{O}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ y que está generado por I, hallar el número de soluciones enteras de $x^2 + 17y^2 = 3^{2004}$.

3) Sea r la *razón aúrea* $r = (1 + \sqrt{5})/2$.
a) Probar que la fracción continua de r es $[1, 1, 1, 1, 1, \dots]$.
b) Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ es la *sucesión de Fibonacci* (determinada por $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$), demostrar que la n-ésima convergente de r es f_{n+2}/f_{n+1}.
c) Explicar cuál es el error en el siguiente razonamiento: $s = (1-\sqrt{5})/2 \Rightarrow s = 1 + 1/s \Rightarrow s = 1 + 1/(1 + 1/s) \Rightarrow s = 1 + 1/\big(1 + 1/(1 + 1/s)\big) \Rightarrow \dots \Rightarrow s = [1, 1, 1, 1, 1, \dots] = r$.

4) Sea $E\ :\ y^2 = x^3 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) Si $b = 0$, entonces E tiene algún punto de orden 2.
b) Si $a = 0$ y $b = 8$, $P = (1, 3)$ tiene orden 4.
c) Si E tiene dos puntos de orden 2 entonces tiene al menos tres.