SOLUCIONES

1) a) No. Sean por ejemplo $\vec{a} = (1,1,1,0)$ y $\vec{b} = (-1,0,1,1)$. Se cumple $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1$ y $\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle = 6$. De modo que son espaciales y no verifican $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

b) Introduciendo la derivación bajo el signo integral y aplicando el teorema de Stokes (suponiendo regularidad suficiente)

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} = -\int_{\partial S} \vec{E} \ \Leftrightarrow\ \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\int_S \mathrm{rot}\,\vec{E} \ \Leftrightarrow\ \int_S \big(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{E}\big) = 0.$$

Si la integral de una función es nula sobre cualquier superficie, dicha función es necesariamente nula, de modo que la fórmula se escribe como $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$.

c) Sea $f(x,y) = (x+y)/(1+xy)$ con $x, y \in (0,1)$. Como $\partial f/\partial x = (1-y^2)/(1+xy)^2 > 0$, f es estrictamente creciente en la primera variable, y por la simetría también en la segunda. Así pues $v_1 \oplus w_1 < v_2 \oplus w_2$. El significado es que, como parece natural, al sumar velocidades mayores se obtienen resultados mayores. Por ser más concreto, si según nuestras observaciones una nave va más rápida que otra y además lanza un misil más veloz que el que lanza la otra, no puede ser que el primer misil se quede atrás.

2) a) El lagrangiano asociado a la métrica es $\mathcal{L} = -(4 - e^{-(x^2-1)^2})\,\dot{t}^{\,2} + \dot{x}^2$. Las líneas de universo verifican en particular

$$\frac{d}{d\lambda}\big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \ \Rightarrow\ 2\ddot{x} = -4x(x^2-1)e^{-(x^2-1)^2}\,\dot{t}^{\,2}.$$

Como estamos considerando una línea de universo parametrizada por el tiempo propio, en particular temporal, $\dot{x}(0) = 0$ implica $\dot{t}(0) \neq 0$. Así pues $e^{-(x^2(0)-1)^2}\,\dot{t}^{\,2}(0) > 0$, y de la fórmula anterior para $\ddot{x}$

$$\mathrm{sgn}\ \ddot{x}(0) = -\mathrm{sgn}\ x(0) \cdot \mathrm{sgn}(x^2(0)-1) = -\mathrm{sgn}\ p \cdot \mathrm{sgn}(p^2-1).$$

La función $y = x^2 - 1$ representa una parábola y es positiva si $|x| > 1$ y negativa si $|x| < 1$. por tanto $\ddot{x}(0)$ será positivo si $|p| > 1$ y $p < 0$, o si $|p| < 1$ y $p > 0$. De la misma forma será negativo si $|p| > 1$ y $p > 0$, o si $|p| < 1$ y $p < 0$. En definitiva, es positivo si $p \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$ y negativo si $p \in (-1,0) \cup (1, +\infty)$.

b) Los rectilandeses que están en $\mathbb{R}^+$ (con velocidad inicial nula) se sienten atraídos hacia el 1 ya que $x''(0) < 0$ a la derecha de $p = 1$ y $x''(0) > 0$ a la izquierda. Mientras que si están en $\mathbb{R}^-$ se sienten atraídos hacia el -1. Ellos pensarían que ninguno de los dos soles tiene más fuerza que el otro (son idénticos) porque sus “cuencas de atracción” son simétricas. Es decir, a la derecha del punto medio $p = 0$ “gana” el sol de $p = 1$ y a la izquierda el de $p = -1$.

Si $p = 0, -1, 1$ el objeto permanece estático. La explicación matemática es que $x = K$, $t = C_1\tau + C_2$ con $K = 0, 1, -1$; $C_1 = (4 - e^{-(K^2-1)^2})^{-1/2}$ y C_2 arbitraria, es la línea de universo (parametrizada por el tiempo propio) que satisface $x(0) = p$, $x'(0) = 0$ (es muy fácil comprobarlo), y a lo largo de ella x es constante. Para los rectilandeses esto es lógico: En $p = 0$ el objeto permanece estático porque los dos soles lo atraen por igual, y en $p = 1$ y -1 también, porque están en el mismo centro del sol.

3) a) Sabíamos que la relación entre los tiempos propios venía dada por

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{1-2GM/r_A}{1-2GM/r_B}}.$$

Sustituyendo $r_A = 10GM/3$ y $r_B = 36GM/13$, se obtiene

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{1-6/10}{1-26/36}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

Como el reloj de Ana pasa de las $16:00$ a las $22:00$, se tiene $\Delta\tau_A = 6\ h$ y por tanto $\Delta\tau_B = 5\ h$. Así pues, verá en el reloj de Blanca las $21:00 = 16:00 + 5\ h$.

b) El lagrangiano es $\mathcal{L} = -(1-2GM/r)\,\dot{t}^2 + (1-2GM/r)^{-1}\,\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2$. De modo que

$$\frac{d}{d\lambda}\big(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}\big) = \partial\mathcal{L}/\partial\varphi \ \Rightarrow\ \frac{d}{d\lambda}\big(2r^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}\big) = 0 \ \Rightarrow\ 2r^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi} = \text{cte}.$$

Siempre (sin más que girar la cabeza) podemos suponer que el movimiento se produce en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, así pues $r^2\dot{\varphi}^2$ =cte. (Ésta es la ecuación $r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = L$ de las geodésicas). Sustituyendo los valores iniciales y los que queremos hallar:

$$(36GM/13)^2 \cdot 0'009 = \text{cte} = (27GM/13)^2\,\frac{d\varphi}{d\tau} \ \Rightarrow\ \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{36^2}{27^2}\cdot 0'009 = 0'016.$$

4) Como $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ y $\{dx, dy\}$ son bases duales, $T_1^1 = T(dx, \partial/\partial x) = 1$ y $T_2^2 = T(dy, \partial/\partial y) = 0$. De hecho se tiene, de la misma forma, que todas las componentes son nulas excepto $T_1^1 = 1$, $T_2^1 = x$. Por otra parte, las funciones que cambian las coordenadas son $(x,y) = f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ y $(r,\theta) = f^{-1}(x,y)$; de modo que las matrices jacobianas correspondientes son (como en el enunciado, la tilda corresponde a las coordenadas polares):

$$\Big(\frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^j}\Big) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Big(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}\Big) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Por la tensorialidad

$$\widetilde{T}_1^1 = \frac{\partial\widetilde{x}^1}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial\widetilde{x}^1}T_j^i = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}T_1^1 + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}T_2^1 = \cos\theta\cdot\cos\theta\cdot 1 + \cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot r\cos\theta$$

$$\widetilde{T}_2^2 = \frac{\partial\widetilde{x}^2}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial\widetilde{x}^2}T_j^i = \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}T_1^1 + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\theta}T_2^1 = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\cdot(-r\operatorname{sen}\theta)\cdot 1 - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\cdot r\cos\theta\cdot r\cos\theta$$

De donde $T_1^1 + T_2^2 = 1 = \widetilde{T}_1^1 + \widetilde{T}_2^2$. La explicación es que T_j^i son las componentes de un tensor $(1,1)$ y consecuentemente la contracción T_i^i corresponde a un tensor $(0,0)$; es decir, a una constante en cada punto, y por tanto es independiente del sistema de coordenadas empleado.

5) a) El *big-bang* corresponde a $t = 0$, o equivalentemente a $v = 0$, y el *big-crunch* corresponderá al siguiente valor de t para el que C se anule. Como $C = 0 \Rightarrow \cos v = 1 \Rightarrow v = 2\pi n$, el tiempo desde el *big-bang* al *big-crunch* será $t = \lambda_0(2\pi - \operatorname{sen}(2\pi)) = 2\pi\lambda_0$. Por la regla de la cadena

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC/dv}{dt/dv} = \frac{\operatorname{sen} v}{1 - \cos v}.$$

De modo que $dC/dt > 0$ si $0 < v < \pi$ y $dC/dt < 0$ si $\pi < v < 2\pi$. Es decir, este universo se expande ($C(t)$ creciente) cuando $0 < t < \pi\lambda_0$, y se contrae ($C(t)$ decreciente) cuando $\pi\lambda_0 < t < 2\pi\lambda_0$. En ambos casos el tiempo que transcurre es $\pi\lambda_0$.

b) Como $dC/dt = \operatorname{sen} v/(1 - \cos v)$, se tiene

$$\Big(\frac{dC}{dt}\Big)^2 + k = \frac{\operatorname{sen}^2 v + (1 - \cos v)^2}{(1 - \cos v)^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v + 1 - 2\cos v}{(1 - \cos v)^2} = \frac{2}{1 - \cos v}.$$

Por otra parte $8\pi G\rho C^2/3 = 8\pi G K_0 \lambda_0^{-1} C^{-1}/3 = 8\pi G K_0 \lambda_0 (1 - \cos v)^{-1}/3$. Por tanto debe cumplirse $\lambda_0 = 4\pi G K_0/3$.