1) En electrodinámica se suelen escribir el campo eléctrico y el magnético en la forma

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},$$

donde ϕ y $\vec{A}$ son funciones, una escalar y otra vectorial, que cumplen $\operatorname{div}\vec{A} + c^{-2}\partial\phi/\partial t = 0$. Demostrar que si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes entonces se cumple

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\Delta\phi \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = c^2\Delta\vec{A}.$$

Nota: Véanse las fórmulas relevantes a pie de página.

2) Responder a las siguientes cuestiones breves:

a) ¿Se cumple la desigualdad triangular $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ en el espacio de Minkowski?

b) ¿Es un tensor la aplicación que asigna a cada par de vectores en $\mathbb{R}^n$ la suma de sus primeras coordenadas (en la base canónica)?

c) La estrella Sirio está a 9 años luz de la Tierra, ¿es posible que para algún observador un viajero espacial tarde sólo 8 años en llegar?

3) Sea el tensor $\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que en la base canónica tiene componentes $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

a) Probar que una matriz $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ aplica bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ en bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $a^k_i a^l_j \delta_{kl} = \delta_{ij}$.

b) Probar que un tensor $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $T_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (en la base canónica), tiene las mismas componentes en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $T = \lambda\,\delta$ donde λ es una constante.

4) Sea la subvariedad $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 + x^2 + y^2\}$ y considérese la métrica G inducida por la usual de $\mathbb{R}^3$, empleando la carta en polares $\phi : (x,y,z) \mapsto (r,\theta)$ con $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Calcular

$$G\Big(\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\Big).$$

Fórmulas:

Ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad c^2\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Para cualquier campo vectorial $\vec{F}$ en $\mathbb{R}^3$ se cumple $\Delta\vec{F} = \nabla(\operatorname{div}\vec{F}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}$.

1) Sean $\vec{E}$ y $\vec{B}$ soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes (véanse a pie de página), de la forma

$$\vec{E} = (f(x,t), g(x,t), 0), \qquad \vec{B} = (0, 0, h(x,t)).$$

a) Demostrar que f es constante.

b) Demostrar con detalle que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

c) Hallar un ejemplo de campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (no constantes) con las propiedades descritas en el enunciado.

---

2) Si un observador se mueve con respecto a nosotros por el eje X a velocidad v y lanza un objeto hacia arriba (eje Z') con velocidad inicial w, probar que la velocidad inicial medida por nosotros será, en unidades relativistas, $\sqrt{v^2 + w^2 - v^2 w^2}$. *Indicación*: Aplicar la regla de la cadena a $\big((dx/dt)^2 + (dz/dt)^2\big)(dt/dt')^2$.

---

3) Se dice que un tensor $(0,2)$ es antisimétrico si la matriz formada por sus componentes en cierta base es antisimétrica.

a) Demostrar que si un tensor $(0,2)$ es antisimétrico empleando una base, lo es usando cualquier otra.

b) Dar un ejemplo de tensor antisimétrico $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ para $n = 2$ y otro para $n = 3$.

c) La igualdad

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 10 \\ -53 & -23 \end{pmatrix}$$

prueba que al cambiar de base una matriz antisimétrica no se obtiene en general otra matriz antisimétrica. Explicar por qué esto no contradice a).

---

4) Sea la subvariedad $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - y + x^2\}$ y considérese la métrica G inducida por la usual de $\mathbb{R}^3$, empleando la carta $\phi : (x,y,z) \mapsto (x,y)$. Calcular $G(\partial_1 + \partial_2, \partial_2)$.

Ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$