EJERCICIOS

1) a) Escoger una solución explícita $u = u(x,t) \in C^2$ no lineal ($u \neq ax + bt + c$) de la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$ y comprobar que tras el cambio de Lorentz $x \mapsto \gamma(x - vt)$, $t \mapsto \gamma(t - vx)$, sigue verificándola. Explicar en pocas palabras (sin fórmulas, sólo intuitivamente) por qué esto es natural desde el punto de vista de la relatividad y las ecuaciones de Maxwell.

b) Demostrar que verdaderamente la propiedad del apartado anterior se cumple para cualquier solución C^2 de la ecuación de ondas.

---

2) En $\mathbb{R}^2$ (con la base canónica) considérese el tensor determinante, D, y el tensor producto escalar usual, E. Hallar todas las componentes no nulas de $T = D \otimes E$.

---

3) Los habitantes de Errelandia creen vivir en una recta real $\mathbb{R}$ en la que hay un sol en el origen que crea un campo gravitatorio, pero un destacado físico errelandés afirma que lo que ocurre es que el espacio-tiempo tiene la métrica

$$-\left(2 - e^{-x^2}\right)dt^2 + dx^2.$$

a) Hallar las ecuaciones diferenciales que definen las líneas de universo en Errelandia.

b) Sea $t = t(\tau)$, $x = x(\tau)$, la línea de universo (parametrizada por el tiempo propio) de una partícula material que parte del reposo (esto es, $x'(0) = 0$). Calcular la "aceleración" $x''(0)$ en función de la posición inicial $x(0)$ y explicar por qué los errelandeses piensan que hay un sol en el origen.

---

4) Considérese un agujero negro con la métrica de Schwarzschild.

a) Escribir razonadamente la fórmula que define el horizonte en unidades no relativistas.

b) Demostrar que a lo largo de cada línea de universo $(1 - 2GM/r)\dot{t}$ permanece constante.

c) Ana y Blanca asisten a un examen en los alrededores del agujero negro. Sabiendo que sus asientos (que se suponen inmóviles) están situados respectivamente en $r = 32GM/7$ y $r = 18GM/5$ y que Blanca, según ella, tarda en realizar su examen 2 horas y 40 minutos, hallar cuánto habrá tardado según Ana.

---

5) Considérese el modelo estándar del universo correspondiente al caso $k = 0$, esto es, dotado con la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + C^2(t)\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right),$$

y con tensor energía-momento cuya única componente no nula es $T_{00} = \rho$.

a) Sabiendo que el tensor de Ricci verifica $R_{00} = -3C''/C$ y $R_{11} = CC'' + 2(C')^2$, deducir la ecuación de Friedmann $(C')^2 = 8\pi G\rho\, C^2/3$.

b) Usando que ρC^3 es constante, resolver la ecuación anterior, y a partir de esta solución y de la constante de Hubble $H_0 = C'(t_0)/C(t_0) = 2'5 \cdot 10^{-18} s^{-1}$, hallar la edad del Universo, t_0.

Instrucciones: 1) El examen dura tres horas aproximadamente. 2) No es necesario entregar la hoja de enunciados. 3) Recuérdese escribir el nombre (con letra clara). 4) Cada ejercicio vale dos puntos. 5) No hace falta usar calculadora: la única operación no trivial es $2/7'5 = 0'266\ldots$

EJERCICIOS

6) El planeta Namek está a cuatro años luz de la Tierra pero un viajero espacial insiste en que, *según sus mediciones*, él ha tardado tres años en llegar viajando a velocidad constante v. Explicar cómo es esto posible y hallar v.

---

7) Se llama semiplano de Poincaré a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dotado con la métrica

$$ds^2 = y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2.$$

Hallar las ecuaciones diferenciales que definen la geodésicas del semiplano de Poincaré y calcular explícitamente todas las geodésicas verticales (con x constante).

---

8) Sabiendo que para las métricas de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2A(t)}dx^2 + dy^2 + dz^2$$

se cumple $R_{00} = -\Gamma^1_{01,0} - \left(\Gamma^1_{01}\right)^2$, hallar las posibles funciones A con $A(1) = 0$, $A'(1) = 1$, de manera que el espacio-tiempo correspondiente esté vacío de masa y energía (esto es, $T_{\alpha\beta} = 0$).

---

9) Considérese un agujero negro con la métrica de Schwarzschild.

a) ¿Cuánto vale la curvatura escalar R fuera de los puntos singulares?

b) Ana y Blanca permanecen estáticas y alineadas en $r = 50GM/9$ y $r = 25GM/8$, respectivamente (en coordenadas de Schwarzschild relativistas). Si Ana ve a las 15:00 que sus relojes están sincronizados, ¿qué hora verá en el reloj de Blanca cuando el suyo marque las 16:36?

---

10) a) Explicar brevemente el corrimiento hacia el rojo de las galaxias lejanas.

b) Durante algún tiempo, Einstein consideró que a escala cosmológica las ecuaciones de campo debían modificarse a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

para alguna constante $\Lambda \neq 0$. Probar que esto implica

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Instrucciones: 1) El examen dura tres horas aproximadamente. 2) No es necesario entregar la hoja de enunciados. 3) Recuérdese escribir el nombre (con letra clara). 4) Cada ejercicio vale dos puntos. 5) No hace falta usar calculadora.