Solución teórica del 2º problema de la Práctica II

Parece claro computacional e intuitivamente que $N_0 \to \infty$ cuando $\epsilon \to 0$ y lo daremos por supuesto[1]. Escribiremos N en lugar de $N_0(\epsilon)$, $h = 1/N$ y emplearemos la notación de Landau, con la que $o(g)$ significa una función f tal que $\lim |f|/|g| = 0$. Por ejemplo, $e^h = 1 + o(1)$, $\operatorname{sen} h = h + o(h^2)$.

Si r_+ y r_- son las raíces positiva y negativa de la ecuación $x^2 + \epsilon x - (1+\epsilon) = h(2x+\epsilon)$, entonces cualquier combinación lineal de r_+^n y r_-^n es solución a la recurrencia del problema:

$$y_{n+2} + \epsilon y_{n+1} - (1+\epsilon) y_n = h(2y_{n+1} + y_n).$$

Nuestra solución es $y_n = Ar_+^n + Br_-^n$ para A y B tales que $A + B = 1$, $Ar_+ + Br_- = 1 + h$. Podríamos escribir exactamente A, B, r_+, r_- pero es más breve proceder con la notación de Landau. Usando $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x)$ se sigue $r_+ = 1 + h + h^2/2 + o(h^2)$ y $r_- = -1 - \epsilon + h - h^2/2 + o(h^2)$, de donde $A = 1 - h^2/4 + o(h^2)$ y $B = h^2/4 + o(h^2)$.

Vamos a ver que $\lim |Ar_+^n + Br_-^n - e| = \texttt{error}(2) = e - 2$ determina el comportamiento asintótico de N en función de ϵ.

Se tiene que $\lim Ar_+^N = \lim (1+h)^N = e$, Si fuera $\epsilon \le \text{cte} \cdot h$, entonces r_-^N estaría acotada y $Br_-^N \to 0$ llevaría a contradicción, así que debe ser $h = o(\epsilon)$ y la condición $\lim |Br_-^N| = e - 2$ equivale a[2] $\lim h^2(1+\epsilon-h)^N = 4e - 8$.

Debe cumplirse $N\epsilon^2 \to 0$, en otro caso el límite es ∞, así que tomando logaritmos y usando $\log(1+\epsilon) = \epsilon - \epsilon^2/2 + \dots$ se sigue $\lim(N\epsilon - 2\log N) = \text{cte}$, lo que implica $\lim N\epsilon/(2\log N) = 1$. Tomando aquí logaritmos y dividiendo entre $\log \epsilon$, $\lim \log N / \log \epsilon = 1$, pero

$$\lim \frac{N\epsilon}{2\log N} = 1, \; \lim \frac{\log N}{\log \epsilon} = 1 \;\Rightarrow\; \lim \frac{N}{f(\epsilon)} = 1 \quad \text{para } f(\epsilon) = -2\frac{\log \epsilon}{\epsilon}.$$

<u>Nota</u>: Con esta f, el cociente $N/f(\epsilon)$ no tiende a 1 demasiado rápido. Elaborando más el argumento se pueden dar mejores aproximaciones con el mismo comportamiento asintótico. Por ejemplo $f(\epsilon) = \epsilon^{-1}(-2\log\epsilon + 2\log(-\log\epsilon) + C)$ con $C = \log(16e^2 - 32e)$, cumple que $N/f(\epsilon)$ es casi constante a partir de $\epsilon = 1/20$.

---

[1] Una prueba rigurosa es: Si $N_k = N_0(\epsilon_k)$ permaneciera acotado con $\epsilon_k \to 0$, entonces $\lim |\texttt{error}(N_k) - \texttt{eror}_0(N_k)| = 0$ donde $\texttt{eror}_0$ es el error en la iteración *leap-frog* $y_{n+2} - y_n = 2hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ correspondiente a $\epsilon = 0$. Para $f(x,y) = y$, $|\texttt{eror}_0(N)|$ es decreciente (ejercicio) y por tanto $\limsup |\texttt{error}(N_k)| = \limsup |\texttt{eror}_0(N_k)| < |\texttt{error}_0(2)|$ contradice $|\texttt{error}(N_k)| > |\texttt{error}(2)|$.

[2] porque $\lim \big(|r_-|/(1+\epsilon)\big)^N = e^{-1}$.