1. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones breves:

a) Dado el método de dos pasos

$$y_{n+2} - (\alpha + 1)y_{n+1} + \alpha y_n = (3 - 7\alpha)hf(x_{n+2}, y_{n+2}),$$

¿es convergente para algún valor de α?

b) Si se aplica la fórmula de cinco puntos con $h = k = 1/N$ al problema $-2\Delta u + 3\lambda u = 0$ en $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ con $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, ¿para cuántos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, contando multiplicidades, no hay solución única? (Nota: La multiplicidad es aquí la dimensión del espacio de soluciones).

c) ¿Puede existir un método de Runge-Kutta explícito de orden 4 y 3 etapas?

d) ¿Cuál es la fórmula de recurrencia para el método de Taylor de orden 2 aplicado al problema $y' = 2x - 3x^4y$, $y(0) = y_0$?

2. Hallar α y β para que el dominio de estabilidad lineal del método de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1/3 & 0 & 1/3 & \\ \hline & \alpha & \beta & 1-\alpha-\beta \end{array}$$

coincida con el de un método de Runge-Kutta explícito de orden 3. Comprobar que, sin embargo, el orden del método obtenido no es 3.

3. Hallar razonadamente todos los pares encajados 2(3) explícitos y satisfaciendo la condición de suma por filas, con el método de mayor orden de tres etapas y el otro de dos ($b_3 = 0$), y cumpliendo $c_3 = (c_2 + b_2)/2$ y $c_2 = (1 + b_1)/2$.

4. Escribir el sistema que se obtiene cuando se aplica el método de elementos finitos al problema de contorno $-2u'' + 48u = 3$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 4$, considerando como funciones base las funciones lineales a trozos ("tejado") asociadas a los nodos $x_j = j/4$, $0 < j \leq 4$ (la última dividida por la mitad). *Indicación*: $\int \phi_1\phi_2 = 1/24$.

Puntuación: (0'75+0'75+0'5+0'5)+2'5+2'5+2'5.

Formulario: Función de amplificación: $R(z) = 1 + z\vec{b}^t(I - zA)^{-1}\vec{1}$.