1. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones breves:

a) Si se aplicase el método de elementos finitos para resolver la ecuación de Poisson $-\Delta u = f$ en tres dimensiones (con funciones base lineales "a trozos"), ¿cuál sería la dimensión de las matrices básicas?

b) Si al aplicar un método de Runge-Kutta el error tomando $h = 0'001$ y $h = 0'003$ es respectivamente $1'011 \cdot 10^{-8}$ y $2'699 \cdot 10^{-7}$, ¿cuál será el orden esperado?

c) Dado el método de dos pasos

$$y_{n+2} - \frac{3}{2}y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = \frac{h}{4}(5f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 3f(x_n, y_n)),$$

¿es convergente?

d) ¿Es posible encontrar un método que tenga orden tres (en general) para problemas escalares $y' = f(y)$ y que tenga orden menor (en general) cuando sean vectoriales?

2. a) Deducir las condiciones de orden cuatro para un método de Runge-Kutta, simplificándolas mediante la condición de suma por filas.

b) Escribir razonadamente dos métodos de Runge-Kutta de dos etapas y de orden dos, uno explícito y otro implícito.

3. a) Hallar el supremo de los $h > 0$ tales que al aplicar el método de Euler al problema

$$y' = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} y,$$

se cumple $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ (para cada h fijado) cualquiera que sea la condición inicial $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$.

b) Hallar el ínfimo de los números reales que pertenecen al dominio de estabilidad lineal del método de Euler.

c) Explicar qué relación guardan los dos apartados anteriores.

4. a) Escribir el sistema que se obtiene cuando se aplica el método de elementos finitos al problema de contorno $-2u'' + 3u = 1$, $u(0) = u(1) = 0$, considerando como funciones base las funciones lineales a trozos ("tejado") asociadas a los nodos $x_j = j/N$, $0 < j < N$. *Indicación*: Para $N = 3$ las dos funciones base ϕ_1, ϕ_2, cumplen $\int \phi_1^2 = 2/9$, $\int \phi_1\phi_2 = 1/18$.

b) Escribir el sistema que se obtiene al aplicar el método de diferencias finitas.

Instrucciones:

1) El examen dura tres horas aproximadamente.

2) No es necesario entregar la hoja de enunciados.

3) Recuérdese escribir el nombre (con letra clara).

4) Se permite emplear calculadora, aunque su uso no es necesario.

5) Cada ejercicio vale dos puntos y medio, siendo la distribución de la puntuación por apartados aproximadamente de la siguiente forma :

$$(0'5 + 0'5 + 0'75 + 0'75) + (2 + 0'5) + (1'25 + 0'5 + 0'75) + (2 + 0'5)$$

Calificaciones:

Las calificaciones de este examen, que sólo incluye la parte teórica de la asignatura, aparecerán previsiblemente el lunes 11 y la revisión tendrá lugar el miércoles 13.

Formulario:

- Función de amplificación:

$$R(z) = 1 + z\vec{b}^t(I - zA)^{-1}\vec{1}.$$

- La coordenada $J-$ésima del error de truncación en un método de Runge-Kutta de orden p satisface

$$R_n^J = \frac{C}{(p+1)!}h^{p+1} + O(h^{p+2}), \qquad C = \sum_{t \in LT_{p+1}} \big(1 - \gamma(t)\sum_j b_j\phi_j(t)\big)F^J(t)$$

con F^J el diferencial elemental

$$F^{J_1}(t) = \sum_{J_2,\ldots,J_q=1}^{d} \prod_{i=1}^{q} f^{J_i}_{t^{-1}(J_i)}.$$

1. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones breves:

a) Dado el método

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \alpha h f(x_{n+2}, y_{n+2}),$$

¿es convergente para algún valor de α?

b) Al aplicar el método de diferencias finitas con ciertos h y k en el cuadrado $Q = [0,1]\times[0,1]$ para aproximar la solución de $\Delta u = 0$, $u\big|_{\partial Q} = f$, se cumple $\max |U_{ij} - u(x_i, y_j)| = 0'0347\ldots$ ¿Qué puede decirse de esta cantidad al cambiar f por $\widetilde{f} = f + 0'001\,\mathrm{sen}(10x^2 + 20y^3)$?

c) ¿Para qué valores de h al aplicar el método de Euler a $y' = -2y$, $y(0) = 7$, se cumple $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$?

d) ¿Por qué si se consideran en $\mathbb{R}^2$ elementos finitos cuadrangulares (en lugar de triangulares), no se pueden tomar funciones base que sean lineales en ellos?

2. Hallar razonadamente todos los pares encajados 2(3) explícitos con el método de mayor orden de tres etapas y el otro de dos ($b_3 = 0$) que cumplan la condición de suma por filas y $c_2 = 2b_2 = 2c_3 > 0$.

3. a) Demostrar que si un método de Runge-Kutta (satisfaciendo la condición de suma por filas) tiene una función de amplificación de la forma $R(z) = 1 + z + z^2/2 + O(z^3)$ entonces necesariamente es de orden 2. *Indicación:* $(I - zA)(I + zA) = I - z^2A \Rightarrow (I - zA)^{-1} = I + zA + O(z^2)$.

b) Estudiar si es $A-$estable el método de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

4. Escribir el sistema que se obtiene cuando se aplica el método de elementos finitos al problema de contorno $-u'' + 24u = 1$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 3$, considerando como funciones base las funciones lineales a trozos ("tejado") asociadas a los nodos $x_j = j/4$, $0 < j \leq 4$ (la última dividida por la mitad). *Indicación:* $\int \phi_1\phi_2 = 1/24$.

Puntuación: $(0'75 + 0'75 + 0'5 + 0'5) + 2'5 + (1'75 + 0'75) + 2'5$.
Formulario: Función de amplificación: $R(z) = 1 + z\vec{b}^t(I - zA)^{-1}\vec{1}$.

1. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones breves:

a) ¿Por qué el orden no puede ser mayor que el número de etapas en un método de Runge-Kutta explícito?

b) Se considera el problema $\Delta u + \alpha u = 0$ en $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ con $u|_{\partial\Omega} = 0$. ¿Para cuántos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, contando multiplicidades, no hay solución única al aplicar el método de diferencias finitas con $h = k = 1/N$? *Nota*: La multiplicidad es la dimensión del espacio de soluciones.

c) Dado el método $y_{n+2} + 2(\mu - 1)y_{n+1} + \mu y_n = 2\mu h f(x_{n+2}, y_{n+2})$, ¿es convergente para algún valor de μ?

d) Si la regla del trapecio, $y_{n+1} = y_n + h\big(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\big)/2$, se aplica al problema $y' = 2y - 4$, $y(0) = 0$, ¿cuál es la fórmula para y_n?

2. Hallar un método de Runge-Kutta explícito de tres etapas y orden 3 satisfaciendo la condición de suma por filas y tal que $c_3 = 2 - 2c_2$, $c_2 > c_3$ y $b_2 = b_3$.

3. Sea el problema

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} y,$$

y sea $A = \{h \; : \; \lim y_n = 0 \text{ para todo } y_0 = y(0) \in \mathbb{R}^2\}$ donde y_n es la $n-$ésima iteración al aplicar el método de Euler.

a) Calcular $\sup A$.

b) Hallar todos los posibles valores de y_0 para los que $\lim y_n = 0$ cuando se toma $h = \sup A$.

4. Sea el problema

$$\begin{cases} -u'' + 18u = 6 \\ u(0) = 0, \; u'(1) = 1 \end{cases}$$

Escribir el sistema que se obtiene al aplicar el método de elementos finitos considerando como funciones base las funciones lineales a trozos ("tejado") asociadas a los nodos $x_j = j/3$, $j = 1, 2, 3$ (tomando para x_3 sólo la parte de la función tejado que cae en el intervalo $[0, 1]$ en el que está definido el problema).