

2. Ondas

2.1. Y dale calor

En la historia de las Matemáticas, y seguramente en la Universal, no hay escasez de leyendas arriesgadas, apoteosis agradecidas y nombres impropios. Aunque las *series de Fourier* no constituyen un ejemplo paradigmático, cabe señalar que en realidad ya habían sido empleadas anteriormente por Euler, y Fourier no resolvió satisfactoriamente, desde el punto de vista actual, las cuestiones más básicas de convergencia. Incluso para sus contemporáneos, había serias faltas de rigor en los razonamientos de Fourier y así se hizo constar cuando su memoria fue galardonada. Por otro lado, también sería injusto olvidar que la “*Teoría Analítica del Calor*” de Fourier [Fo], publicada en 1822, marcó un hito constituyendo el primer tratado sistemático de lo que hoy llamamos Análisis Armónico o Análisis de Fourier. Como el título indica, Fourier se ocupó de estudiar la transmisión del calor. Aunque menciona varias veces la gran aplicabilidad de su teoría, lo cierto es que prácticamente no incluye ningún dato numérico experimental (lo cual es lógico dada la dificultad de medir con precisión pequeñas variaciones de la temperatura) y el grueso de su trabajo se dedica a resolver el problema matemático al que conduce su modelo. Esto ya es un gran avance científico porque marca un camino sistemático para la termodinámica, hasta entonces inexistente. En sus palabras: “Las nuevas teorías explicadas en nuestra obra están unidas para siempre a las ciencias matemáticas y reposan, como ellas, sobre fundamentos invariables; conservarán todos los elementos que hoy poseen y adquirirán continuamente más alcance”. Más adelante ([Fo] I §20), arrobado de entusiasmo, escribirá: “El análisis matemático tiene, pues, relaciones necesarias con los fenómenos físicos sensibles; su objeto no ha sido creado por la inteligencia humana, es un elemento preexistente del orden universal y no tiene nada de contingente ni fortuito; está impreso en la naturaleza”.

Antes de ver los problemas matemáticos que le preocupaban a Fourier y por qué los incluimos en un capítulo que trata acerca de ondas, debemos plantear el sencillo modelo que conduce a la ecuación del calor. Seguiremos al pie de la letra [Ch] §5.3.

El calor no es más que una forma de energía, por eso en la caja de cereales del desayuno aparece el contenido energético tanto en kilojulios (KJ) como en kilocalorías (Kcal), comúnmente llamadas calorías, por error, en Dietética. La temperatura absoluta (en grados Kelvin), que denotaremos por u , es la energía media, de modo que el calor total en una porción sólida homogénea V de cierta sustancia, es

$$Q = K \int_V u$$

donde K es una constante positiva que depende del tipo de sustancia considerada. Cuando

un cuerpo caliente se pone en contacto con otro frío la energía (el calor) fluye del primero al segundo. Por ejemplo, en una dimensión si tenemos un punto x a temperatura $u(x)$ y otro “al lado”, $x + \Delta x$, a temperatura $u(x + \Delta x)$, parece lógico (incluso para Simplicio [Ga] p. 29) suponer que el calor fluirá del primero al segundo en una magnitud proporcional a $u(x) - u(x + \Delta x) \approx -\Delta x \partial u / \partial x$. La ley de enfriamiento de Newton no es otra cosa que esta suposición llevada a tres dimensiones. Concretamente afirma que el vector flujo de energía es proporcional a $-\nabla u$ (recuérdese que la dirección opuesta al gradiente es siempre la de máximo decrecimiento) y por tanto el flujo del calor a través de la frontera de V , que denominaremos ∂V , es, para cierta constante $K' > 0$, igual a la integral de superficie

$$\mathcal{F} = -K' \int_{\partial V} \nabla u.$$

Si el calor se escapa de los puntos calientes a los fríos, la temperatura cambia con el tiempo, como nos demuestra cualquier taza de café, digamos $u = u(x, y, z, t)$. Parece obvio que las pérdidas de calor de la porción de sustancia V que hemos seleccionado, se hacen a través de la frontera, es decir, que la variación del calor en V por unidad de tiempo se cancela con el flujo a través de la frontera. Escrito con fórmulas

$$K \frac{d}{dt} \int_V u - K' \int_{\partial V} \nabla u = 0.$$

Nótese que lo único que estamos diciendo es que para sacar algo (en nuestro caso calor) de un cuerpo hay que hacerlo a través de su frontera. Para que la fórmula quede bonita, siempre podemos medir el espacio o el tiempo en un sistema de unidades tomado de la Ciencia Ficción o de nuestra imaginación, de manera que el cambio de escala provoque la igualdad $K/K' = 1$.

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\partial V} \nabla u = 0.$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right) = 0 \quad \text{con} \quad \Delta u = \text{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Si esta igualdad se cumple para cualquier porción V de la sustancia elegida, no queda más remedio que el integrando se anule (la función nula es la única que integrada en cualquier parte da cero). Llegamos entonces finalmente a la *ecuación del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

Diccionario:

- El calor fluye hacia los sitios más fríos \longrightarrow flujo = $-\text{cte} \int_{\partial V} \nabla u$.
- El calor se escapa por la frontera $\longrightarrow \frac{d}{dt} \int_V u = \text{cte} \cdot \text{flujo}$.
- Estas propiedades se cumplen en cada entorno $\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$.

A pesar de que la propia situación física y nuestros razonamientos son en principio tridimensionales, podemos repetirlos en dimensiones uno y dos considerando varillas o superficies totalmente aisladas del medio exterior y empleando el teorema de la divergencia en la dimensión adecuada (en dimensión uno es el teorema fundamental del cálculo y en dimensión dos una variante del teorema de Green). Ya en el caso unidimensional se ve la importancia de la topología de la varilla que consideremos y servirá para ilustrar lo importante que se muestra analizar en *ondas*.

Si tenemos una varilla infinita (una recta), físicamente parece claro que la evolución de su temperatura depende sólo de la temperatura inicial ($t = 0$) en cada punto $u(x, 0) = f(x)$. Si la varilla en lugar de ser infinita está curvada formando un aro, digamos de longitud uno, podemos identificar x con la longitud de arco y así $u(x, t)$ y $f(x)$ deben ser funciones periódicas en x de periodo uno. Matemáticamente en este caso nos enfrentamos al problema de hallar una solución de

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad \text{con} \quad u(x, 0) = f(x), \quad \text{donde} \quad f(x) = f(x + 1).$$

Fourier se dio cuenta de que había infinitas soluciones sencillas de periodo uno en x de la ecuación del calor, dadas por

$$e^{-4\pi^2 n^2 t} \text{sen}(2\pi n x), \quad e^{-4\pi^2 n^2 t} \text{cos}(2\pi n x) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En $t = 0$ dan lugar a senos y cosenos de frecuencias enteras. Si tuviéramos la suerte de que f fuera una combinación lineal (incluso “infinita”) de senos y cosenos de este tipo habríamos resuelto (2.1) sin más que introducir el factor $e^{-4\pi^2 n^2 t}$ correspondiente para $t > 0$. La gran sorpresa es que no hace falta tener suerte, siempre podemos expresar cualquier función f decente y periódica en términos de senos y cosenos como antes. Físicamente se tiene el importantísimo adagio:

Toda onda periódica se expresa como una superposición de tonos puros

Para simplificar el tratamiento matemático recurrimos a un artificio técnico consistente en que debido a las relaciones $\text{sen } t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, $\text{cos } t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, basta expresar toda función en términos de las funciones complejas

$$e(n x) = e^{2\pi i n t} = \text{cos}(2\pi n t) + i \text{sen}(2\pi n t) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

No deben darnos miedo los números complejos, son sólo para escribir dos funciones en una.

El teorema fundamental es el que establece el ahora llamado *desarrollo de Fourier*.

Teorema 2.1. Sea $f \in C^2$ una función de periodo uno, entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nx) \quad \text{con} \quad a_n = \int_0^1 f(y) e(-ny) dy,$$

donde la suma se entiende como límite de $\sum_{|n| \leq N}$ y la convergencia es absoluta y uniforme.

Una consecuencia inmediata que se sigue simplemente sustituyendo es:

Corolario 2.2. La siguiente función es solución de (2.1):

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-4\pi^2 n^2 t} e(nx) \quad \text{con} \quad a_n = \int_0^1 f(y) e(-ny) dy.$$

DEM. (del Teorema): Sea el núcleo de Dirichlet $D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e(nx)$. Un cálculo prueba que

$$\sum_{|n| \leq N} a_n e(nx) = \int_0^1 D_N(x-y) f(y) dy = \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t) f(x-t) dt,$$

donde la última igualdad se sigue del cambio de variable $t = x - y$, y notando que el intervalo de integración (aquí elegido como $[-1/2, 1/2]$) es arbitrario con tal de que se extienda a todo un periodo. Por otra parte, en cada periodo $\int D_N = 1$ y por tanto

$$f(x) - \sum_{|n| \leq N} a_n e(nx) = \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t) (f(x) - f(x-t)) dt.$$

Utilizando la fórmula para sumar una progresión geométrica, después de simplificar adecuadamente, se obtiene $D_N(t) = \text{sen}((2N+1)\pi t) / \text{sen}(\pi t)$. La función $h_x(t) = (f(x) - f(x-t)) / \text{sen}(\pi t)$ es C^1 en t , así que integrando por partes

$$f(x) - \sum_{|n| \leq N} a_n e(nx) = -\frac{1}{(2N+1)\pi} \int_{-1/2}^{1/2} h'_x(t) \cos((2N+1)\pi t) dt.$$

Lo que prueba la convergencia uniforme a la función f . La convergencia absoluta se sigue simplemente integrando dos veces por partes en la fórmula de a_n ya que $\sum n^{-2} < \infty$. ■

La regularidad de f se puede rebajar sin perder la convergencia uniforme [Dy-Mc]. Buena parte de los esfuerzos en Análisis Armónico se han dedicado a entender en diferentes

contextos en qué sentido se pueden representar funciones con *tonos puros* bajo condiciones de mínima regularidad [We]. En general la regularidad se refleja en la rapidez de convergencia. Cuando la función es C^∞ , la aproximación es increíblemente buena. Por ejemplo, los siguientes gráficos muestran $f(x) = e^{\cos(2\pi x)}$ (en línea discontinua) aproximada por $\sum_{|n|\leq N} a_n e(nx)$ para $N = 1, 2$ y 3 .

Una vez que sabemos expresar las funciones periódicas de periodo uno mediante su desarrollo de Fourier, podemos hacer lo propio con una función de periodo L simplemente con un cambio de variable $x \mapsto x/L$. Así se tiene que f es superposición de ondas del tipo $\sin(2\pi nx/L)$ y $\cos(2\pi nx/L)$, o con la notación empleada anteriormente,

$$(2.2) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nx/L) \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) e(-ny/L) dy.$$

Con ello podemos construir la solución de la ecuación para un aro de cualquier longitud.

Nótese que para un aro de longitud L debemos analizar en ondas de frecuencias múltiplos enteros de $1/L$. Si pensamos que un aro de longitud $L \rightarrow \infty$ se aproxima a una varilla infinita (y análogamente que una función no periódica es de “periodo infinito”), para analizar las temperaturas en ella necesitaríamos todas las frecuencias. Para ser más precisos, (2.2) se puede escribir como

$$f(x) = h \sum_{\xi_n} g(\xi_n) e(\xi_n x) \quad \text{con} \quad g(t) = \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e(-yt) dy$$

donde $\xi_n = nh$ y $h = 1/L$. Esto es como una suma de Riemann de una integral, y cuando $L \rightarrow \infty$, bajo condiciones adecuadas de regularidad se debe tener la llamada *fórmula de inversión*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e(\xi x) d\xi \quad \text{con} \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e(-y\xi) dy.$$

A la función \widehat{f} se le llama *transformada de Fourier* de f . La fórmula de inversión expresa f como una superposición continua (integral) de los “tonos puros” $e(\xi x) = \cos(2\pi\xi x) + i\sin(2\pi\xi x)$. Estas fórmulas vuelven a ser ciertas para funciones integrables con dos derivadas integrables (en realidad mucha menos regularidad es suficiente [Dy-Mc]).

Por tanto, en el caso de una varilla infinita podemos partir como antes de las soluciones “obvias” $e^{-4\pi^2\xi^2 t} \sin(2\pi\xi x)$ y $e^{-4\pi^2\xi^2 t} \cos(2\pi\xi x)$, sintetizadas en $e^{-4\pi^2\xi^2 t} e(\xi x)$, para probar que la solución de la ecuación del calor para una varilla infinita con dato inicial $u(x, 0) = f(x)$ es para $t > 0$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2\xi^2 t} \widehat{f}(\xi) e(\xi x) d\xi.$$

Si se sustituye la definición de \widehat{f} y se emplea $\int e^{-4\pi^2\xi^2 t} e(r\xi) d\xi = e^{-r^2/(4t)}/\sqrt{4\pi t}$ (véase [Gr-Ry] 17.23.13), se llega a una representación más sencilla

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} f(y) dy \quad \text{para } t > 0.$$

No hay ningún problema en extender a más dimensiones los desarrollos y transformadas de Fourier usando una función $e(\cdot)$ por cada variable. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 se define

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2, y_3) e(-y_1\xi_1) e(-y_2\xi_2) e(-y_3\xi_3) dy_1 dy_2 dy_3.$$

Y se tiene una fórmula como la de \mathbb{R} para la solución de la ecuación del calor en \mathbb{R}^3 .

Epílogo: Cuando se estudian otros problemas o la misma ecuación del calor en dominios más complicados, las “soluciones naturales” (obtenidas por separación de variables) pueden no ser senos y cosenos sino funciones más complejas (funciones de Bessel, armónicos esféricos, etc.). Sin embargo vuelve a ocurrir el milagro, de nuevo todo se desarrolla en términos de ellas. Esto tiene que ver lejanamente con el conocido resultado de Álgebra Lineal que afirma que toda matriz simétrica diagonaliza en una base ortonormal, lo cual se puede reformular diciendo que los autovectores de un endomorfismo autoadjunto en un espacio vectorial de dimensión finita producen una base ortogonal. Hay *teoremas espectrales* (cf. [Co-Hi] III §5) que extienden esto a dimensión infinita. Así por ejemplo $\sin(2\pi n x)$ y $\cos(2\pi n x)$ son autovectores (autofunciones) del operador lineal derivada segunda en el espacio vectorial de las funciones de periodo uno.

Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Deducir la ecuación del calor. b) Explicar qué es el desarrollo de Fourier

2) Sea una varilla infinita (la recta real) en la que la temperatura inicial es positiva en un entorno del origen y nula fuera de él. Demostrar que en cualquier instante posterior al inicial, la temperatura es positiva en todo punto. ¿Por qué se dice que la velocidad del calor es infinita?

3) Explicar por qué al estudiar la temperatura en un sólido cuya frontera está térmicamente aislada se impone en ella $\nabla u \cdot \vec{n} = 0$, con \vec{n} la normal.

4) Probar que según el modelo de esta sección, el promedio de la temperatura de un aro permanece constante a lo largo del tiempo. ¿Qué ocurre en la práctica?

5) Para f de periodo uno, hallar su momento de orden dos, esto es $\int_0^1 |f|^2$, en términos de los coeficientes de Fourier. Utilizar este hecho para probar que en un aro el momento de orden dos de la temperatura siempre decrece. (Supóngase la convergencia).

6) Probar que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \bar{f} g$ define un producto escalar en la funciones continuas (reales o complejas) de periodo uno. Probar que $e(nx)$ son ortonormales y deducir que $\sum a_n e(nx) = \sum b_n e(nx)$ con convergencia uniforme a una función continua $\Rightarrow a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. (Unicidad del desarrollo de Fourier).

7) Un modelo plausible [Dy-Mc] para la temperatura en el interior de la Tierra a profundidad x (pequeña) es que $u(x, t)$ sea periódica en t de periodo uno (un año) por efecto de las estaciones, y se tenga $u(x, t) = \sum c_n(x) e(nt)$ con $c_n(x)$ acotada para $x > 0$. Deducir $c_n(x) = a_n e^{-x(1 \pm i)\sqrt{\pi|n|}}$ de la ecuación del calor, donde a_n son los coeficientes de Fourier de la temperatura en la superficie $f(t) = u(0, t)$ y el signo \pm es el de n .

8) Hallar explícitamente $u(x, t)$ cuando en el problema anterior se toma $f(t) = \text{sen}(2\pi t) + \text{cte}$ (de este modo pleno invierno y pleno verano corresponden a $t = 1/4$ y $t = 3/4$, respectivamente). Deducir que las estaciones no actúan con la misma intensidad ni al mismo tiempo en la superficie que en el interior.

9) Comprobar que $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty (e^{-(x-v)^2/(4t)} - e^{-(x+v)^2/(4t)}) f(v) dv$, con f suficientemente regular, resuelve la ecuación del calor para $x \in [0, +\infty)$ bajo las condiciones $u(0, t) = 0$ y $u(x, 0) = f(x)$, $x > 0$.

10) Comprobar que $u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\pi^2 n^2 t} \text{sen}(\pi n x)$ satisface formalmente la ecuación del calor para la “varilla” $x \in [0, 1]$ con extremos “fríos” $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Calculando $\int_0^1 u(x, t) \text{sen}(\pi n x) dx$, hallar a_n en función de la temperatura inicial $f(x) = u(x, 0)$. Si es posible, con la ayuda de un ordenador trazar gráficas de u para diferentes tiempos cuando $f(x) = 1/2 - |x - 1/2|$.

11) Si a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f y g (de periodo uno), hallar los coeficientes de Fourier de $h(x) = \int_0^1 f(x-t)g(t) dt$.

SECCIÓN 2.1

Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros (el precio de esta fotocopia)

De la sección:

- Termodinámica.
- Ecuaciones de la combustión.

Generales:

- Análisis Funcional y Teoría de Distribuciones en Mecánica Cuántica.
- Redes neuronales.

Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

La serie de Fourier es un precioso instrumento del cual el análisis hace un uso continuo; por ese medio es cómo ha podido representar funciones discontinuas. Si Fourier lo ha inventado fue para resolver un problema de física, relativo a la propagación del calor. Si este problema no se hubiera planteado naturalmente, nunca se habría osado resistir al continuo sus derechos; durante mucho tiempo, todavía, se habría considerado a las funciones continuas como las únicas verdaderas. [Po] p. 101.

2.2. Todo en blanco y negro

No es necesario comprarse un escáner ni una cámara digital, basta darse un garbeo por la red para toparse con montones de fotos cuya extensión es `.jpg` que corresponden al formato JPEG (según parece, sería más propio decir JFIF). La razón de su insistente presencia es que permite conservar una calidad fotográfica bastante aceptable con ficheros de tamaño relativamente pequeño y por tanto susceptibles de ser transmitidos con rapidez. Lo que hay en estos ficheros es una versión filtrada y comprimida de los coeficientes de Fourier discretos de diferentes trocitos de la fotografía. Así que puede que las Matemáticas no sirvan para nada, pero podemos recibir por *e-mail* una foto con beso de nuestra pareja ausente, almacenar en nuestro disco duro una imagen del nuevo sobrinito recién tomada con una cámara digital, o retocar la cara de nuestro profesor sin efectos secundarios, gracias a que alguien entendió las técnicas estudiadas en la asignatura Ecuaciones Diferenciales y Análisis Funcional o en Variable Real.

En primer lugar definiremos qué es una fotografía, o para ser más modernos, una foto digitalizada. Usualmente es un rectángulo formado por *pixels* (cuadraditos), cada uno de ellos dotados de un color. Matemáticamente se puede considerar como un función

$$F : R \longrightarrow C \quad \text{con} \quad R = ([a, b] \times [c, d]) \cap \mathbb{Z}^2,$$

asignando al *pixel* (i, j) del rectángulo R el color $F(i, j)$. Los colores se especifican por tres *bytes* (la cantidad de rojo, verde y azul que contienen), de modo que hay $2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 = 16\,777\,216$ colores diferentes. En el formato JPEG hay un tratamiento previo del color (se hace un cambio de coordenadas a las llamadas coordenadas de luminancia y crominancia) porque la fisiología de nuestro ojo causa que seamos capaces de distinguir mejor unos colores que otros. Para librarnos de este detalle técnico digamos que nuestra fotografía es en blanco y negro. De todos los colores anteriores sólo 256 corresponden a tonos de gris. Numerándolos del -128 (negro) al 127 (blanco) se tiene $C = \{-128, -127, \dots, 0, \dots, 127\}$.

Como puede haber partes de la foto más difíciles de analizar que otras, se subdivide el rectángulo R en cuadraditos Q_i de 8×8 *pixels*. La restricción de F a cada uno de ellos es una *subfoto*, $f = F|_{Q_i}$, que en la jerga se llama *data unit* y aquí denominaremos simplemente *bloque*. Todos ellos se tratan de la misma forma, así que se puede suponer

$$f : Q \longrightarrow C \quad \text{con} \quad Q = \{0, 1, 2, \dots, 7\} \times \{0, 1, 2, \dots, 7\} \quad \text{y} \quad C = \{-128, \dots, 127\}.$$

Evidente todas estas posibles funciones f que determinan un bloque pueden identificarse con un subconjunto del espacio vectorial $V = \{f : Q \longrightarrow \mathbb{R}\}$. Lo que vamos a hacer es hallar una base \mathcal{B} de V y representar f por sus coordenadas en dicha base. Asignaremos a cada elemento de la base un número que indique lo distinguible que es a simple vista, y eliminaremos las coordenadas pequeñas de los elementos poco visibles, o las almacenaremos con menos precisión. Con este filtrado de las coordenadas perderemos información acerca

de f , pero apenas notaremos los cambios a simple vista. Es decir, habremos conseguido una compresión razonable del espacio en memoria que ocupa cada bloque y, por tanto, la imagen total F .

Diccionario:

- Foto en blanco y negro $\longrightarrow F : R \longrightarrow C = \{-128, \dots, 127\}$
- Bloque de 8×8 *pixels* $\longrightarrow f : Q = \{0, 1, 2, \dots, 7\}^2 \longrightarrow C$
- Análisis del bloque $f \longrightarrow$ Expresión de f en cierta base \mathcal{B} de $V = \{f : Q \longrightarrow \mathbb{R}\}$
- Compresión \longrightarrow Eliminación o modificación de algunas coordenadas.

La pregunta natural es cómo escoger una base \mathcal{B} de V . Evidentemente hay infinitas posibilidades, pero buscamos una que sea adecuada. La idea parte del análisis de Fourier, que nos dice que “cualquier” función (señal) periódica de periodo L se puede expresar como una suma quizá infinita de $\sin(2\pi kx/L)$ y $\cos(2\pi kx/L)$ con ciertos coeficientes. De modo que para una función definida en $[0, L]$ la serie de Fourier es su extensión periódica. Si sacrificamos esta última propiedad hay varios artificios para usar sólo senos o cosenos (a fin de cuentas $\sin(x + \pi/2) = \cos x$), lo cual puede ser útil computacionalmente, y con un poco de ingenio se puede acelerar la convergencia con respecto a la serie de Fourier usual. Por ejemplo, una función definida en $[0, L]$ se expresa como una suma de cosenos de la forma $\cos(\pi k(x + 1/2)/L)$, con ciertos coeficientes. Para extender el resultado a dos dimensiones basta considerar productos de cosenos de esta forma, uno por cada variable.

En nuestro caso $L = 8$ y sólo queremos analizar funciones discretas, es decir, con $(x, y) = (n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Si todo funcionase igual que en el caso continuo, las funciones

$$\phi_{kl}(n, m) = \cos\left(\frac{\pi k}{16}(2n + 1)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi l}{16}(2m + 1)\right)$$

debería dar lugar a una base. Ciertamente el argumento anterior es sólo un leve indicio o una ayuda a nuestra intuición. Necesitamos una prueba rigurosa. **Proposición 2.3.** $\mathcal{B} = \{\phi_{kl}\}_{k,l=0}^7$ es una base de $V = \{f : Q \longrightarrow \mathbb{R}\}$. De hecho es una base ortogonal con respecto al producto escalar “usual”

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n,m=0}^7 f(n, m)g(n, m).$$

DEM.: Cada función $f \in V$ queda determinada por su valor en los 64 elementos de Q , por tanto $\dim V = 64$, y como $\mathcal{B} \subset V$ con $|\mathcal{B}| = 64$, \mathcal{B} es una base si y sólo si sus elementos

son linealmente independientes. Para verlo basta comprobar que son ortogonales, ya que en ese caso

$$\sum_{k,l=0}^7 \lambda_{kl} \phi_{kl} = 0 \Rightarrow \sum_{k,l=0}^7 \lambda_{kl} \langle \phi_{kl}, \phi_{k_0 l_0} \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_{k_0 l_0} = 0.$$

Nótese que para $a \in \mathbb{Z}$, $0 < |a| < 16$,

$$\sum_{n=0}^7 \cos\left(\frac{\pi a}{16}(2n+1)\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^7 e^{i\pi a(2n+1)/16}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\pi a/16} \sum_{n=0}^7 e^{i\pi a n/8}\right) = 0.$$

(La última igualdad se sigue de la fórmula para sumar una progresión geométrica o usando las propiedades de las raíces de la unidad). Partiendo de la fórmula elemental

$$2 \cos\left(\frac{\pi k_1}{16}(2n+1)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2}{16}(2n+1)\right) = \cos\left(\frac{\pi(k_1+k_2)}{16}(2n+1)\right) + \cos\left(\frac{\pi(k_1-k_2)}{16}(2n+1)\right),$$

según lo anterior al sumar en n con $0 \leq k_1, k_2 \leq 7$ el resultado es nulo excepto si $k_1 - k_2 = 0$. Cambiando k_1, k_2 y n por l_1, l_2 y m , se deduce en definitiva que $\langle \phi_{k_1 l_1}, \phi_{k_2 l_2} \rangle = 0$ excepto si $k_1 - k_2 = l_1 - l_2 = 0$. ■

Nótese que $\langle \phi_{00}, \phi_{00} \rangle = 8^2 = 64$ y del cálculo de la demostración se deduce que en el resto de los casos $\langle \phi_{kl}, \phi_{kl} \rangle$ es $4 \cdot 8$ o $4 \cdot 4$ dependiendo de si k o l son cero o no. Una consecuencia inmediata es el *desarrollo de Fourier en serie discreta de cosenos* [Ma]:

Corolario 2.4. *Si $f \in V$ entonces*

$$f = \sum_{k,l=0}^7 \lambda_{kl} \phi_{kl} \quad \text{con} \quad \lambda_{kl} = \delta_k \delta_l \langle f, \phi_{kl} \rangle \quad \text{con} \quad \delta_n = \begin{cases} 1/8 & \text{si } n = 0 \\ 1/4 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

En vez de guardar los valores de los colores indicados por f en los 64 elementos de Q , podemos almacenar los coeficientes λ_{kl} , pero con ello todavía no hemos ganado nada, siguen siendo 64 números, incluso es peor, porque los λ_{kl} no son enteros en general, y al guardarlos en la memoria discreta de una computadora perdemos decimales.

El corolario anterior permite expresar un bloque $f : Q \rightarrow C$ como una superposición (suma) de las fotos básicas correspondientes a ciertos múltiplos de las funciones de \mathcal{B} . Como todas las ϕ_{kl} , excepto ϕ_{00} , tienen promedio cero, todas estas fotos básicas, menos la primera, se verán como un cuadrado del color correspondiente a cero (un gris medio) cuando estemos suficientemente lejos o si tenemos una vista poco aguda. Pero las más

oscilatorias (k y l mayores) dejan de distinguirse antes. Con un ejemplo quedará más claro. Consideremos los cuadrados

Los tres primeros representan múltiplos de las funciones base ϕ_{04} , ϕ_{44} y ϕ_{77} . mientras que el último es un cuadrado de color cero. Si miramos desde lejos (quizá a unos metros) el tercero y el cuarto parecerán iguales: una mancha gris. Desde mucho más lejos puede que lleguemos a ver el segundo igual; y cuando apenas podemos distinguir los cuadrados, todos nos pareceran similares. En las imágenes en formato JPEG estos cuadrados suelen ser menores y por tanto el efecto es más acusado (además aquí está empobrecido por la poca calidad de impresión y porque seguramente el papel no está blanqueado).

La conclusión es que en general no pasa nada grave si cometemos un error pequeño en λ_{77} ya que ϕ_{77} no se distingue demasiado de la función nula. El error que nos podemos permitir en λ_{44} es menor, y en λ_{04} menor todavía. Los chicos del JPEG son, como indica el acrónimo (*Joint Photographic Experts Group*), unos expertos que (¿ayudados por buenos “videntes”?) han mirado con cuidado los errores enteros máximos en cada coeficiente de manera que a simple vista no se note un gran cambio en la calidad de la imagen. Como en el mundo de la informática y aledaños todo debe tener un nombre ampuloso, estos números (los errores) se conocen como *coeficientes de cuantización*, y la tabla formada por ellos *matriz de cuantización*. Su elección es en principio arbitraria pero ellos recomiendan

$$E = \begin{pmatrix} e_{00} & e_{01} & \dots & e_{07} \\ e_{10} & e_{11} & \dots & e_{17} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{70} & e_{71} & \dots & e_{77} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{pmatrix}.$$

Lo que realmente se almacena (de manera comprimida) en un fichero `.jpg` no son los λ_{kl} sino la parte entera de λ_{kl}/e_{kl} que ocupa muy poca memoria, y que para las frecuencias altas (k, l grandes) tiene grandes posibilidades de ser cero porque los e_{kl} son en ese caso grandes. Evidentemente un fichero que tiene muchos ceros es susceptible de ser comprimido con diferentes algoritmos que no se discutirán aquí, aunque son una parte fundamental del éxito del formato. Cuando nos llega a través de la red un fichero `.jpg`, después de descomprimirlo, nuestro ordenador trata de reconstruir los λ_{kl} aproximadamente a partir de las partes enteras de λ_{kl}/e_{kl} . Simplemente multiplicando por e_{kl} se comete un error

máximo de e_{kl} según el siguiente sencillo resultado:

Lema 2.5. Sea $e \in \mathbb{Z}^+$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\tilde{\lambda} = eE(\lambda/e)$, donde $E = E(x)$ es la función parte entera, entonces $0 \leq \lambda - \tilde{\lambda} < e$.

DEM.: Dividiendo λ entre e se obtiene un cociente entero q y un resto $0 \leq r < e$ de forma que $\lambda = qe + r$. Por tanto $eE(\lambda/e) = eq = \lambda - r$. ■

Finalmente el ordenador aproxima cada bloque de la imagen por $\sum \tilde{\lambda}_{kl} \phi_{kl}$, mostrando en pantalla algo muy parecido a la foto digitalizada original. (Esta explicación es un poco esquemática. En realidad los ficheros .jpg contienen también una cabecera con información por ejemplo acerca de la matriz de cuantización. Además en la práctica en la codificación se emplea la función *entero más cercano* en vez de la parte entera [Wa]).

El proceso descrito para la creación de un fichero .jpg a partir de una fotografía se puede entender como un filtrado de frecuencias eliminando casi siempre las mayores. Ésta es una situación que se repite en otros contextos: Por muy bien que queramos grabar un sonido, nos podemos olvidar de las frecuencias mayores que 20 000 Hz porque quizá a nuestro perro le gusten, pero superan nuestro nivel de audición (son ultrasonidos); o por mucha calidad que queramos dar a una película no es necesario que proyectemos los ultravioletas porque los espectadores no van a notar su existencia (a no ser que incrementemos su intensidad y se pongan morenos).

Veamos el efecto del filtrado de frecuencias sobre una imagen que conocemos bien.

En la primera imagen se han eliminado todos los λ_{kl} excepto λ_{00} (esto es como elegir $e_{kl} = 256$ y $e_{00} = 1$). En la segunda se incluyen también λ_{01} , λ_{10} , λ_{11} y λ_{02} , con lo cual la calidad mejora sensiblemente. Comparando estas imágenes podemos apreciar la

singularidad de la función base ϕ_{00} frente al resto de las ϕ_{kl} . Al ser ϕ_{00} constante, en la primera imagen cada bloque tiene el color de su promedio y el resultado es cubista o “cuadradista”. Las otras ϕ_{kl} son oscilatorias de promedio cero y sirven para representar las variaciones que dan lugar a los detalles. En la jerga al uso, al coeficiente de ϕ_{00} se le llama DC, y al resto AC. Estos AC y DC significan lo mismo que en el *High Voltage* o en los alimentadores de nuestros dispositivos electrónicos, puesto que son las siglas de *Altern Current* y *Direct Current* (evidentemente, corriente alterna y corriente continua).

En la siguiente imagen se consideran todos los λ_{kl} con $0 \leq k, l < 4$. A pesar de ser únicamente la cuarta parte de los coeficientes, la calidad es bastante aceptable. Podemos potenciar ciertos efectos notando por ejemplo que los ϕ_{kl} con k pequeño presentan pocas variaciones horizontales y por tanto no permiten distinguir detalles en esta dirección. Como se ve en la última imagen, anulando todos los λ_{kl} excepto las que tienen $k = 0$, se logra perder precisión en las líneas horizontales frente a la verticales.

De nuevo hay que tener en cuenta que la calidad de impresión (y un ligero filtrado previo para poder manipular los ficheros) perjudican en cierta medida la calidad de las imágenes tal como aparecen aquí.

Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Indicar por qué y en qué sentido las frecuencias grandes se suelen despreciar en el formato JPEG. b) Explicar para qué sirve la matriz de cuantización.

2) Hallar los λ_{kl} de una foto que consta de un solo punto.

3) Repetir el problema anterior para una recta horizontal, simplificando al máximo los λ_{kl} .

4) Demostrar que todos los valores de las funciones $\phi_{kl}(n, m)$ se pueden calcular a partir de $\cos(\pi/16)$ efectuando sólo sumas restas y multiplicaciones. (Una forma computacionalmente útil de organizar las operaciones da lugar a la conocida FFT *Fast Fourier Transform* [Ge], [Ta]).

5) Probar que si los bloques tuvieran $j \times j$ pixels en lugar de 8×8 , entonces $\phi_{kl}(n, m) = \cos(\frac{\pi k}{2j}(2n+1)) \cdot \cos(\frac{\pi l}{2j}(2m+1))$ con $k, l \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, sería una base ortogonal de V . Hallar δ_n .

6) Suponiendo un bloque de 3×3 pixels con $f(n, m) = -128$ si $n, m \in \{0, 1\}$ y $f(n, m) = 0$ si $n = 2$ o $m = 2$; calcular los λ_{kl} con la base del problema anterior. Hallar también los valores de f que se reconstruirían si la matriz de cuantización tuviera $e_{ij} = 20(1+i+j)$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$ y se cuantizara redondeando al entero más cercano.

7) Probar que $\tilde{\mathcal{B}} = \{\psi_{kl}\}_{k,l=0}^7$ con $\psi_{kl}(n, m) = e((kn+lm)/8)$ es una base de $V = \{f : Q \rightarrow \mathbb{C}\}$, y que es ortogonal con el producto escalar $\langle f, g \rangle = \sum \bar{f}(n, m)g(n, m)$. Hallar la fórmula para los λ_{kl} y tratar de encontrar alguna ventaja y algún inconveniente si \mathcal{B} se reemplaza por $\tilde{\mathcal{B}}$.

8) Hallar una fórmula para $\sum_{n,m=0}^7 (f(n, m))^2$ en términos de los λ_{kl} .

9) Probar que $\{\psi_{kl}\}_{k,l=1}^6$ con $\psi_{kl}(n, m) = \sin(\frac{\pi kn}{7}) \cdot \sin(\frac{\pi lm}{7})$ es una base ortogonal del subespacio de V formado por las funciones que se anulan en el borde de Q .

10) Calcúlese la serie de Fourier (introducida en la sección anterior) de la función parte fraccionaria. Comprobar que la serie no converge absolutamente y que en 0 y 1 ni siquiera converge al valor de la función tomando el límite de las sumas parciales con $|n| \leq N$, $N \rightarrow \infty$. (Esto prueba los efectos negativos globales que tienen las discontinuidades sobre la serie de Fourier, y refleja las deficiencias del formato JPEG al enfrentarse a bordes abruptos).

11) Dada $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ se define su extensión par $f_p : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ como $f_p(x) = f(|x|)$. Dando por supuestas buenas propiedades de convergencia de la serie de Fourier de f_p en $[-L, L]$, demostrar que $f(x) = \sum c_n \cos(\frac{\pi n}{L}x)$ para $x \in [0, L]$. Concluir que, bajo buenas condiciones de convergencia, para $f : [-1/2, L-1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene $f(x) = \sum d_n \cos(\frac{\pi n}{2L}(2x+1))$.

SECCIÓN 2.2

Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros (el precio de esta fotocopia)

De la sección:

- Compresión fractal de imágenes y otros métodos de compresión.
- Tratamiento y análisis de señales.
- El principio de incertidumbre.

Generales:

- Prospecciones geológicas.
- Estrategias en las apuestas quinielísticas.

Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

Detrás de la serie de Fourier, otras series análogas han entrado en los dominios del análisis y lo han hecho por la misma puerta; han sido imaginadas en vista de sus aplicaciones. [Po] p. 101.

2.3. Buscando la luz

Uno de los descubrimientos científicos que han influido más drásticamente en nuestra vida cotidiana es el de las ondas electromagnéticas. Históricamente dicho descubrimiento lo llevó a cabo H. Hertz en un primitivo laboratorio en 1888, y su aplicación práctica a las telecomunicaciones fue obra en gran medida de G. Marconi, a caballo entre los siglos XIX y XX. Pero difícilmente esto habría sido posible sin el modelo teórico introducido por J.C. Maxwell en 1873. En su famoso tratado [Mx] describe minuciosamente experimentos y resultados anteriores, y después de pasarlos por los métodos del incipiente Cálculo Vectorial (una de las primeras pruebas del teorema de Stokes está en [Mx]), los transforma en las famosas *ecuaciones de Maxwell*.

Como éste no es el lugar adecuado para estudiar Electrodinámica, nos limitaremos a una descripción somera e incompleta de la situación física (véase [Fe-Le-Sa] para profundizar). Los campos eléctrico y magnético se indican respectivamente mediante dos funciones vectoriales \vec{E} y \vec{B} . La propia ley de Coulomb en el caso estático y, en cualquier caso, experimentos muy precisos, muestran que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que no encierra cargas es nulo. Ésta es la *ley de Gauss*. En términos matemáticos, en ausencia de cargas

$$(2.3) \quad \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{para } S \text{ superficie cerrada.}$$

Esto es algo así como decir que si no hay fuentes de campo eléctrico internas, lo que entra en S por un lado sale por otro.

La relación entre el campo eléctrico y el magnético es hoy día bien conocida por medio del principio de la dinamo. Al pasar un imán por una espira conductora L aparece una corriente eléctrica circulando por ella, y cuanto más deprisa pasemos el imán o cuantos más imanes pongamos en la superficie S que limita la espira, mayor es la fuerza electromotriz inducida.

Esto hace pensar que la variación del flujo del campo magnético es proporcional a la circulación del campo eléctrico por la espira. En una fórmula:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = K \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Cuando el flujo aumenta, la circulación eléctrica va en sentido negativo, así que $K < 0$, y se

han elegido las unidades en el Sistema Internacional de forma que $K = -1$. En definitiva, se tiene la *ley de Faraday-Henry*:

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{para } S \text{ superficie con frontera } L.$$

Los fenómenos eléctricos y magnéticos son en cierto modo simétricos, y al igual que la ley de Coulomb conduce a (2.3), la ley de Ampère-Laplace [**Al-Fi**] o, siguiendo a Maxwell, los “monopolos magnéticos” (no se sabe si existen) [**Go**] p. 157, conducen a la *ley de Gauss para el campo magnético*:

$$(2.5) \quad \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{para } S \text{ superficie cerrada.}$$

Por ello no es extraño que se cumpla el análogo de (2.4) aunque no se puedan ajustar simultáneamente las unidades, de manera que el -1 debe reemplazarse por otra constante más fea, que esta vez es positiva y denotaremos con c^2 . Este análogo de (2.4) se llama *ley de Ampère-Maxwell* o quizá más propiamente *ley de Maxwell*:

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = c^2 \int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad \text{para } S \text{ superficie con frontera } L.$$

Donde se supone que no hay cargas (corrientes) atravesando S . En realidad esta ecuación es difícil de comprobar experimentalmente por el típicamente pequeñísimo valor de $\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$. Maxwell llegó a ella considerando el caso en que había cargas libres y probando que si no se cumpliese (2.6) con una constante específica, la carga total no se conservaría [**Al-Fi**], [**Fe-Le-Sa**]. Actualmente se conoce que $c^2 = 8'9874 \cdot 10^{16}$, la estimación de Maxwell fue algo peor [**Mx**]. Quizá por la notación, o extrayendo su raíz cuadrada, muchos se percatarán de que no es una constante tan fea.

Diccionario:

- Campos eléctrico y magnético \longrightarrow Funciones vectoriales \vec{E} y \vec{B} que satisfacen (2.3), (fuera de las cargas) (2.4), (2.5) y (2.6).

Vamos a probar que necesariamente \vec{E} y \vec{B} son ondas, en el sentido de que cada una de sus componentes verifican la ecuación de ondas. Con este fin escribiremos, al igual que hizo Maxwell, las ecuaciones anteriores en una forma más sintética.

Proposición 2.6. Sean $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ y $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$ funciones vectoriales regulares $\vec{E}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ verificando (2.3), (2.4), (2.5) y (2.6). Entonces también satisfacen las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

$$(2.7) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Además cada una de sus componentes verifican la ecuación de ondas $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \Delta u$ donde Δ es el operador laplaciano $\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$.

DEM.: Aplicando el teorema de la divergencia a (2.3) y (2.5) se tiene

$$\int_R \operatorname{div} \vec{E} \, d\operatorname{Vol} = 0 \quad \text{y} \quad \int_R \operatorname{div} \vec{B} \, d\operatorname{Vol} = 0$$

donde R es la región sólida acotada por S . Como S es arbitraria se deduce $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ y $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

Introduciendo la derivada bajo el signo integral en (2.4) y (2.6), y aplicando el teorema de Stokes

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{y} \quad \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = c^2 \int_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Al pasar todo a un miembro, se tiene que los flujos de $\partial \vec{B} / \partial t + \operatorname{rot} \vec{E}$ y de $\partial \vec{E} / \partial t - c^2 \operatorname{rot} \vec{B}$ son nulos a través de cualquier superficie, por lo que ambos campos deben ser nulos.

Antes de seguir mencionaremos la relación

$$(2.8) \quad \Delta \vec{F} - \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F}$$

donde el laplaciano actúa sobre \vec{F} coordenada a coordenada. Probarlo se reduce a un cálculo tedioso.

Al derivar con respecto de t la cuarta ecuación de (2.7) y sustituyendo la tercera, se sigue

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Empleando (2.8) y $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ se llega inmediatamente a la ecuación de ondas. De la misma forma, al derivar con respecto de t la tercera ecuación de (2.7) y sustituir la cuarta, se llega a (2.9) con \vec{B} en lugar de \vec{E} , y por tanto \vec{B} también satisface la ecuación de ondas. ■

En 1873 nadie creía haber visto nunca una onda electromagnética, pero Maxwell conjeturó que se engañaban porque la luz era una onda electromagnética. Su conjetura

venía avalada por el hecho de que la velocidad c de las soluciones de la ecuación de ondas era parecida según sus cálculos (e idéntica según los actuales) a la velocidad de la luz. Con la maquinaria matemática adecuada es posible deducir propiedades ópticas como la difracción a partir de las ecuaciones de Maxwell [Co]. Por otro lado, cuando Hertz descubrió las primeras ondas electromagnéticas invisibles, dedicó parte de sus esfuerzos a comprobar las propiedades que compartían con la luz, en especial la reflexión.

Para explicar en qué sentido las soluciones de la ecuación de ondas son ondas de velocidad c , fijémonos en el caso de una dimensión espacial, en el que la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Su solución general es

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{con} \quad u_1 = f(x - ct), \quad u_2 = g(x + ct)$$

donde f y g son funciones C^2 arbitrarias. Nótese que la gráfica de u_1 para $t = 0$ coincide con la de f ; para $t = 1$ se traslada c unidades a la derecha; para $t = 2$ se traslada $2c$ unidades, etc. Lo mismo ocurre con u_2 salvo que ahora la gráfica viaja a la izquierda con velocidad c . El caso tridimensional general es geoméricamente más complejo [Co], [Fe-Le-Sa] §20) pero cualitativamente similar: un “pulso” que pasa por cierto punto tarda en llegar a otro punto situado a distancia d un tiempo d/c . Por ejemplo, la solución general cuando $u(\vec{x}, 0) = 0$ viene dada por [Dy-Mc]

$$u(\vec{x}, t) = t^{-1} \int f(\vec{x} + ct\vec{v}) dS(\vec{v})$$

donde la integral se extiende a la esfera unidad $\|\vec{v}\| = 1$. Para f muy concentrada en el origen, al cabo de t segundos observaremos una onda esférica en $\|\vec{x}\| = ct$.

Al igual que en el caso de la ecuación del calor, los desarrollos de Fourier y sus generalizaciones se muestran como un instrumento fundamental para el estudio de las soluciones de la ecuación de ondas que satisfacen ciertas condiciones de contorno especificadas.

Epílogo: A principios del siglo XX había evidencias teóricas y experimentales que sugerían que las ecuaciones de Maxwell eran ciertas en cualquier sistema inercial (para observadores en reposo o con velocidad constante), y ésta fue la base para la creación de la Teoría de la Relatividad [Po] §VIII. Sin entrar en detalles, supóngase que buscamos cambios lineales entre diferentes sistemas de referencia que dejen fijos el operador correspondiente a la ecuación de ondas, $\square = c^2 \Delta - \partial^2 / \partial t^2$, entonces se llega indefectiblemente a que la única posibilidad son las transformaciones de Lorentz.

Proposición 2.7. *Las aplicaciones lineales invertibles $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifican $\square(u \circ T) = (\square u) \circ T$ para toda $u = u(x, y, z, t) \in C^2$, coinciden con las que dejan invariante*

la forma cuadrática $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$, llamadas transformaciones de Lorentz (generalizadas).

Nota: Orientando adecuadamente los ejes espaciales, las transformaciones de Lorentz generalizadas se reducen a la transformación de Lorentz por antonomasia que aparece en los libros de Física [A1-Fi] §6.6. Siguiendo a Minkowski (que había sido profesor de Einstein), estas transformaciones se pueden entender como los movimientos rígidos en \mathbb{R}^4 dotado de una distancia “rara” (no es positiva) que viene definida a través de la forma cuadrática de la proposición [G1]. Esta interpretación geométrica le pareció inicialmente inútil a Einstein, pero más tarde se mostró necesaria para llegar a entender la gravitación.

DEM.: Para u suficientemente regular, por la fórmula de inversión

$$u(T\vec{x}) = \int \widehat{u}(\vec{\xi}) e(-T\vec{x} \cdot \vec{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \quad \text{con } \vec{x} = (x, y, z, t).$$

Escribiendo $T\vec{x} \cdot \vec{\xi} = \vec{x} \cdot (T^t \vec{\xi})$ y aplicando \square se llega a

$$\square(u \circ T)(\vec{x}) = 4\pi^2 \int \widehat{u}(\vec{\xi}) P(\vec{\xi}) e(-T\vec{x} \cdot \vec{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$$

donde $P(\vec{\xi}) = (T^t \vec{\xi})^t D (T^t \vec{\xi})$ y D la matriz diagonal con $d_{11} = d_{22} = d_{33} = c^2$, $d_{44} = -1$. Al comparar con $(\square u)(T\vec{x})$ se tiene que debe cumplirse $P(\vec{\xi}) = \vec{\xi}^t D \vec{\xi}$. De aquí $TDT^t = D$ o equivalentemente $(T^{-1})^t c^2 D^{-1} T^{-1} = c^2 D^{-1}$. Como $c^2 D^{-1}$ es la matriz de Q , se sigue que $Q(T^{-1}\vec{x}) = Q(\vec{x})$, o cambiando \vec{x} por $T\vec{x}$, $Q(\vec{x}) = Q(T\vec{x})$. ■

Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Explicar por qué $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ indica que el flujo eléctrico es nulo. b) Deducir la ecuación $\partial \vec{B} / \partial t = -\operatorname{rot} \vec{E}$ a partir de su significado experimental.

2) En electrodinámica se suele escribir $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ y $\vec{E} = -\nabla \phi - \partial \vec{A} / \partial t$ donde ϕ y \vec{A} son funciones que verifican $c^2 \operatorname{div} \vec{A} + \partial \phi / \partial t = 0$ llamadas potencial escalar y potencial vectorial, respectivamente. Probar, usando las ecuaciones de Maxwell, que $\square \vec{F} = \vec{0}$ donde \vec{F} es un campo vectorial de \mathbb{R}^4 definido por $\vec{F} = (c^{-1} \phi, \vec{A})$ y $\square = c^2 \Delta - \partial^2 / \partial t^2$.

3) Sea $\phi \in C_0^2$ y \vec{n} un vector unitario. Comprobar que $u(\vec{x}, t) = \phi(ct - \vec{n} \cdot \vec{x})$ es solución de la ecuación de ondas. Tratar de explicar por qué se dice que ésta es una *onda plana*.

4) Supongamos que $E_3 = 0$ y que E_1 y E_2 no dependen de la variable z . Demostrar que si en algún instante B_1 y B_2 se anulan, entonces se anulan para todo tiempo.

5) Sea A_+ y A_- los operadores $A_{\pm} = \partial / \partial t \pm c \partial / \partial x$. Comprobar que la ecuación de ondas se puede escribir como $A_- A_+ u = 0$. Escribiendo $u(x, t) = v(x + ct, x - ct)$ con $v(a, b) = u(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2c})$, demostrar que su solución general es $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$.

6) En presencia de una distribución continua de cargas, la primera ecuación de Maxwell debe modificarse a $\operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} \rho$ donde ϵ_0 es una constante y ρ es la densidad de carga (carga por unidad de volumen). Probar que en ese caso $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0^{-1} Q$ donde Q es la carga total encerrada por la superficie cerrada S .

7) Considérese la ecuación de ondas unidimensional en $0 \leq x \leq 1$ bajo las condiciones de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Probar que la *energía* $\int_0^1 (\partial u / \partial t)^2 dx + c^2 \int_0^1 (\partial u / \partial x)^2 dx$ es constante. Tratar de generalizar este hecho al caso tridimensional (para ello conviene recordar la identidad de Green).

8) Sea G un giro de ángulo α alrededor de uno de los ejes. Probar que si \vec{E} verifica la primera ecuación de Maxwell entonces $G \vec{E} \circ G^{-1}$ también lo hace. Tratar de explicar el significado físico.

9) La transformación de Lorentz actúa como $(x, t) \mapsto (\gamma(x - vt), \gamma(t - vx/c^2))$ con $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Comprobar que deja la forma cuadrática $x^2 - c^2 t^2$ invariante y demostrar directamente que si una función satisface la ecuación de ondas unidimensional, al transformar las variables de esta forma la sigue cumpliendo.

10) Explicar por qué la relación $\frac{d}{dt} \int_R \rho d\operatorname{Vol} = - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ se conoce con el nombre de “ley de conservación de la carga” donde ρ es la densidad de carga, \vec{v} es la velocidad de las cargas en cada punto, y R es una región sólida arbitraria con frontera S .

11) Demostrar que $\Delta \vec{F} = \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F}$.

SECCIÓN 2.3

Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos (el precio de esta fotocopia)

De la sección:

- Difracción.
- Comentario paso a paso del famoso artículo de Einstein en 1905 sobre la relatividad especial.
- La ecuación de Dirac (sólo aconsejable si se tienen conocimientos previos de Física).
- Circuitos electrónicos.

Generales:

- Aplicaciones de la Teoría de Grupos.
- Ecuaciones básicas de la Física Cuántica.

Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

Cuando Maxwell hubo comenzado sus trabajos, las leyes de la electrodinámica admitidas hasta entonces daban cuenta de todos los hechos conocidos. No había ninguna experiencia nueva que hubiera venido a invalidarlas.

Pero examinándolas según un ángulo nuevo, Maxwell reconoció que las ecuaciones se vuelven más simétricas cuando se les agrega un término. Por otra parte, este término era demasiado pequeño para introducir efectos apreciables con los métodos antiguos.

Se sabe que los concimientos a priori de Maxwell han esperado veinte años una confirmación experimental. Si preferís, Maxwell ha precedido en veinte años a la experiencia.

¿Cómo se ha obtenido este triunfo?

Porque Maxwell estaba profundamente impregnado del sentimiento de la simetría matemática. ¿Habría sido lo mismo si otros no hubieran investigado antes esa simetría por su propia belleza? [Po] p.97.

Corriente alterna, corriente continua

Material:

- Una rueda que se pueda hacer girar rápido (por ejemplo de un juguete).
- Cartulina blanca.
- Un rotulador oscuro.
- Una linterna a pilas

Comenzaremos cortando un círculo de cartulina blanca que podamos pegar o ajustar con cuerdas a la rueda que gira. Si ésta tiene algún eje que sobresalga se puede dar a la cartulina forma ligeramente cónica (como un gorro chino). Dividiremos el círculo en cierto número par de sectores iguales y colorearemos uno de cada dos con el rotulador (como una sombrilla). A no ser que la rueda se pueda hacer girar realmente muy rápido no conviene hacer un número de sectores inferior a 20 o 30*.

Lo que vamos a reproducir es el fenómeno que tantas veces se ve en la televisión o el cine, consistente en que las aspas de un helicóptero o los tapacubos de un coche parecen estar por un instante detenidos o girar en sentido contrario. Para ello daremos impulso en sentido positivo a la rueda lo más rápido posible y utilizaremos para ver el fenómeno la luz artificial de cualquier lámpara doméstica con bombillas de incandescencia (normales y corrientes). Casi todo el tiempo veremos la rueda de color uniforme, pero en cierto momento los sectores avanzarán lentamente en el sentido de giro hasta detenerse un instante y cambiar de sentido. Si la rueda gira muy deprisa veremos el efecto más de una vez. Por si no fuera ya curioso el fenómeno, resulta que desaparece completamente al iluminar la rueda con la luz de la linterna o al usar luz natural.

Explicación: La corriente eléctrica de uso doméstico es una onda sinusoidal que oscila 50 veces por segundo (frecuencia 50 Hz). Es decir, el voltaje que sale de nuestros enchufes

* *N. del A.* Ajusté con cuerdas la cartulina dividida en 24 sectores a una rueda hueca (con radios) de 7 *cm* de diámetro de una pequeña calesa decorativa.

viene determinado por una ecuación del tipo $V(t) = V_0 \text{sen}(100\pi t)$. Lo que aprovechan los aparatos electrodomésticos de esta tensión oscilante que varía entre $-V_0$ y V_0 cada $T = 1/50 = 0'02$ segundos es lo que se llama *tensión eficaz* [Ru] §6.10, que viene dada por la norma dos normalizada en cada periodo, esto es, $V_{ef}^2 = T^{-1} \int_0^T |V(t)|^2 dt$. Sustituyendo, $V_{ef} = V_0/\sqrt{2}$. En la electricidad doméstica $V_{ef} = 220 V$, de modo que el voltaje de nuestros enchufes alcanza picos de $V_0 = 220\sqrt{2} = 311'1 V$.

En los intervalos de la forma $(-T/8 + nT/2, T/8 + nT/2)$ se cumplirá $|V(t)| < V_{ef}$, con lo cual la bombilla de nuestra lámpara alumbrará poco, mientras que el resto del tiempo se cumple la desigualdad contraria. Es decir, cada $T/2$ segundos habrá habido una fase de “luz” y otra de “oscuridad”. Es como encender y apagar la luz con periodo $T/2$.

Si miramos a un punto fijo de la rueda, los sectores blancos y oscuros se sucederán con un periodo pequeño. Por ejemplo, si hay 15 sectores oscuros y la rueda da seis vueltas por segundo el periodo es $T' = 1/90$. Si $T' = T/2$ entonces justamente la luz estará encendida siempre en el instante en que un mismo tipo de sector (blanco u oscuro) está en el punto fijado, con lo cual nos parecerá que los sectores se paran. En el instante anterior la rueda iba un poco más rápida y por tanto $T' = T/2 - \epsilon$. Así pues, tras los $T/2$ segundos que transcurren desde que la luz se enciende hasta que se vuelve a encender, como los sectores oscilan un poco más rápido, les habrá dado tiempo a ir un poco más lejos de la siguiente posición y parecerá que se desplazan en sentido positivo. El efecto contrario se produce cuando por causa de la deceleración $T' = T/2 + \epsilon$.

Como la linterna funciona con pilas (corriente continua), su luz, al igual que la del sol, no presenta oscilaciones y anula el efecto descrito.

Subes o bajas

Material:

- Un imán de nevera.
- Un objeto ferromagnético pesado.
- Una cuerda resistente.
- Un cordel.

Colguemos el objeto pesado de la cuerda resistente para formar un péndulo. Atemos el imán de nevera con el cordel y peguémoslo al objeto pesado asegurándonos de que con un leve tirón se despega, y el péndulo queda oscilando ligerísimamente*

Ahora, partiendo de la posición de equilibrio y con el imán pegado, hay que tener un poco de paciencia, y tirar del cordel imperceptiblemente tratando de seguir las casi invisibles oscilaciones del péndulo. Después de unos cuantos intentos, el péndulo se habrá puesto en movimiento.

Si seguimos haciendo que el estiramiento del cordel acompañe al movimiento del péndulo podremos conseguir una amplitud en las oscilaciones asombrosa. Sobre todo teniendo en cuenta que al principio habíamos comprobado que el imán apenas tenía fuerza para modificar la posición de equilibrio.

Explicación: Igualando la fuerza a la componente tangencial del peso, como es bien conocido, se sigue la ecuación que rige el péndulo simple $l\theta'' = g \sin \theta$, donde l es la longitud y g es la aceleración de la gravedad. Para ángulos no muy grandes, $\sin \theta \approx \theta$ y la ecuación se reduce a $\theta'' = g\theta$. Si el movimiento parte del punto de máxima elongación, la solución de esta ecuación es de la forma:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{g/l}.$$

* *N. del A.* Emplé un cubo metálico cargado con algunas cosas. Su peso era de 6'3 kg. Para debilitar más todavía la fuerza del imán, lo recubrí con papel. De esta manera el péndulo apenas se desviaba de su posición inicial antes de que se soltase el imán.

Para ser realistas, el movimiento de un péndulo siempre se amortigua por el rozamiento del aire, y éste, dentro de cierta aproximación, viene dado por un múltiplo pequeño de la velocidad [**Al-Fi**] §7.10 (mayor velocidad \Rightarrow mayor resistencia). Por tanto, un modelo bastante aproximado del movimiento del péndulo sin nuestra acción externa es:

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta + 2\delta\theta' = 0 \quad \text{para cierto } \delta > 0.$$

El análogo de la solución anterior, es ahora, para $\delta < \omega_0$,

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t} \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}).$$

Es decir, el movimiento se amortigua, como era de esperar. Además la frecuencia no varía con el tiempo ([**Ga**] p. 201).

La situación descrita en nuestro experimento corresponde a aplicar una fuerza sincrona con el péndulo, de frecuencia ω muy próxima a ω_0 . Esta fuerza estará representada por un nuevo término de la forma $\epsilon \cos(\omega t)$ con ϵ pequeño. Hay que resolver, por tanto

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta + 2\delta\theta' = \epsilon \cos(\omega t).$$

Una solución particular de esta ecuación es $B \cos(\omega t + \eta_0)$ con un η_0 adecuado y

$$B = \frac{\epsilon}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$

Mientras que la solución general es de la forma

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t} \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} + \alpha) + B \cos(\omega t + \eta_0).$$

Con A y α dependiendo de las condiciones iniciales. Según crezca el tiempo, el primer término se hará despreciable, y si $\omega \approx \omega_0$ el término restante tendrá amplitud $B \approx \epsilon/(2\delta\omega)$. Si el rozamiento del aire es poco significativo, el resultado será mucho mayor que ϵ . De hecho $B \rightarrow \infty$ si $\delta \rightarrow 0$. Por tanto con pequeñas fuerzas, a la larga se pueden obtener grandes amplitudes si se emplea la frecuencia correcta. Éste es el famoso fenómeno de la *resonancia*. Aquí nos hemos centrado en un ejemplo mecánico, pero hay ecuaciones similares que regulan los circuitos electrónicos básicos [**Ru**]. De esta forma, la resonancia es el principio por el cual los receptores de radio y televisión pueden “cazar” selectivamente la frecuencia correspondiente a una sola emisión. Ya nos ocuparemos nosotros de cambiar rápidamente de canal para ver y oír todos al tiempo.