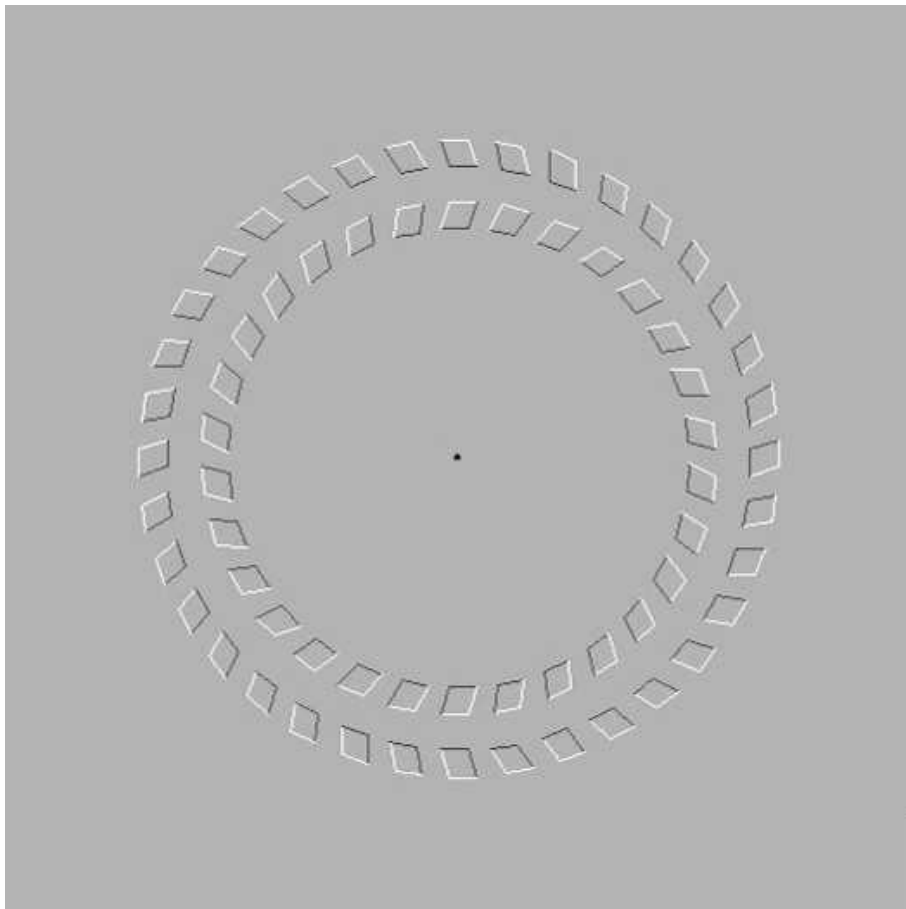


# Modelización II

(un pase de modelos)



2003  
L o z i m a h C o  
e n t e F e r n a n d o



# Contenidos

- **Introducción**

- **Modelos de la Mecánica**

- La braquistocrona.
- Mecánica lagrangiana.
- Movimiento giroscópico.
- Películas de jabón.

*Experiencias*

- **Ondas**

- Transmisión del calor.
- El formato JPEG.
- Ondas electromagnéticas.

*Experiencias*

- **Tomografía.**

- Reconstrucción algebraica.
- Transformada de Radon.

*Experiencias*

- **Modelos probabilísticos.**

- El teorema central del límite.
- Paseos aleatorios.
- Difusión y movimiento browniano.

*Experiencias*

- **Fluidos**

- Ecuaciones de Euler.
- Fluidos estacionarios e irrotacionales.
- Ecuaciones de Navier-Stokes.

*Experiencias*

- **Direcciones en la red**

- **Programas**

# Referencias

Nota: Esta lista de referencias tiene carácter provisional y puede ser ligeramente ampliada a lo largo del curso.

[**Al-Fi**] M. ALONSO, E.J. FINN. *Física*. Vol. I, II. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

[**Al-Ta**] F. ALMGREN, J.E. TAYLOR. *The Geometry of Soap Bubbles and Soap Films*. Scientific American 235 (1976), no. 1, 82-93.

[**Ch**] F. CHAMIZO. *Cálculo III (El cálculo de segundo es muy fácil)*. UAM 2001. Disponible en versión electrónica en <http://www.uam.es/fernando.chamizo>.

[**Ch-Ma**] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 1979.

[**Co**] A. CÓRDOBA. *El método de Fourier y la difracción de la luz: un ensayo*. Incluido en *La Luz: el Ayer, el Hoy y el Mañana*. F. Jaque Rechea y J. García Solé (Editores). Alianza Universidad 842. Alianza Editorial, 1996.

[**Co-Hi**] R. COURANT, D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publishers, 1953.

[**Do**] M.P. DO CARMO *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Universidad Textos 135. Alianza, 1990.

[**Du-Fo-No**] B.A. DUBROVIN, A.T. FOMENKO, S.P. NOVIKOV. *Modern Geometry - Methods and Applications (Part I)*. Graduate Texts in Mathematics 93. Springer-Verlag, 1984.

[**Dy-Mc**] H. DYM, H.P. MCKEAN. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, 1972.

[**Fe**] W. FELLER. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley, 1971.

[**Fe-Le-Sa**] R.P. FEYNMAN, R.B. LEIGHTON, M. SANDS. *Física*. Vol. II. Electromagnetismo y materia. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

[**Fo**] J. FOURIER. *Teoría Analítica del Calor*. Universidad Politécnica de Madrid, 1992.

[**Ga**] G. GALILEI. *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*. Alianza Editorial, 1994.

[**Ge**] N.A. GERSHENFELD. *The Nature of Mathematical Modeling*. Alianza Editorial, 1995.

- [Go] H. GOLDSTEIN. *Mecánica Clásica*. Reverté, 1988.
- [Gl] L.I. GOLOVINA. *Álgebra Lineal y algunas de sus aplicaciones*. Mir, 1974.
- [Gr-Ry] I.S. GRADSHTEYN, I.M. RYZHIK. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1994.
- [Gr] C.W. GROETSCH. *Inverse Problems: activities for undergraduates*. Mathematical Association of America, 1999.
- [He-Jo-Bu] M.T. HEIDEMAN, D.H. JOHNSON, C.S. BURRUS. *Gauss and the history of the fast Fourier transform*. Arch. Hist. Exact Sci. 34 (1985), no. 3, 265-277.
- [Hi-Tr] S. HILDEBRANDT, A. TROMBA. *Mathematics and Optimal Form*. Scientific American Library, 1985.
- [Hu-Ma] T.J.R. HUGHES, J.E. MARSDEN. *A Short Course in Fluid Mechanics*. Mathematics Lecture Series 6. Publish or Perish, 1976.
- [Is] C. ISENBERG. *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*. Dover Books Explaining Science. Dover, 1992.
- [Ju] YA. JURGUIN. *Bueno, ¿y qué?* Mir, 1973.
- [Ka-Sl] A.C. KAK, M. SLANEY. *Principles of Computerized Tomography Imaging*. IEEE Press 1988. (También disponible en <http://www.slaney.org/pct/pct-toc.html>).
- [Ko] V.S. KOROLIUK. *Manual de la Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática*. Mir, 1981.
- [La] C. LANZOS. *The Variational Principles of Mechanics*. Mathematical Expositions 4. University of Toronto Press, 1970.
- [Ma] S. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [Ma-Pu] C. MARCHIORO, M. PULVIRENTI. *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*. Springer-Verlag, 1994.
- [Mx] J.C. MAXWELL. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. I, II. Oxford Classic Series. Clarendon Press, 1998.
- [Mz] J. MAZUMDAR. *An Introduction to Mathematical Physiology and Biology*. Cambridge Studies in Mathematical Biology 15. Cambridge University Press 1999.
- [Mo] F. MORGAN. *Geometric Measure Theory: a beginner's guide*. Academic Press, 1988.
- [Mu] J. MUÑOZ SANTONJA. *Newton: el umbral de la ciencia moderna*. La Matemática en sus personajes 3. Nivola libros, 1999.

[Na] F. NATTERER. *Mathematical models for medical imaging*. Computational radiology and imaging (Minneapolis, MN, 1997), 17-32, IMA Vol. Math. Appl. 110. Springer, 1999.

[Po] H. POINCARÉ. *El Valor de la Ciencia*. Austral 628. Serie Marrón: Ciencia y técnica. Clásicos de la Ciencia. Espasa Calpe, 1964.

[Ra-Ka] A.G. RAMM, A.I. KATSEVICH. *The Radon Transform and Local Tomography*. CRC Press, 1996.

[Ru] J. RUIZ VÁZQUEZ. *Física*. Selecciones Científicas, 1978.

[Sm-So-Wa] K.T. SMITH, D.C. SOLMON, S.L. WAGNER. *Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs*. Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), no. 6, 1227–1270.

[Sp] M. SPIVAK. *Cálculo Infinitesimal. Calculus*. Vol. I, II. Reverté, 1984.

[St-Bu] J. STOER, R. BULIRSCH. *Introduction to Numerical Analysis*. (2nd edition). Texts in Applied Mathematics 12. Springer 1993.

[Ta] M.E. TAYLOR. *Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematics 23. Springer 1996.

[Ti] V.M. TIKHOMIROV. *Stories about Maxima and Minima*. Mathematical World, Vol. 1. Mathematical Association of America, 1990.

[Va 1] J.L. VÁZQUEZ. *Lecciones de Mecánica de Fluidos*. Universidad Autónoma de Madrid 1997.

[Va 2] J.L. VÁZQUEZ. *Matemáticas, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera*. UAM 2002. (Disponible en: <http://www.uam.es/juanluis.vazquez>). Es versión actualizada en español de *The importance of Mathematics in the development of Science and Technology*. Boletín Soc. Esp. Mat. Aplicada 19, (2001), 69-112.

[Wa] G.K. WALLACE. *The JPEG still picture compression standard*. Communications of the ACM 34 (4) (1991), 30–44.

[We] G.L. WEISS. *Harmonic Analysis*. Incluido en *The Chauvenet papers: a collection of prize-winning expository papers in Mathematics*. (Ed. J.C. Abbott). Mathematical Association of America, 1978.

[Yn] F.J. YNDURÁIN. *Mecánica Cuántica*. Alianza Universidad Textos. Alianza, 1988.

[Yo] A. YOUNG (ET AL.). *AC/DC Live*. Disc I. Atco 7567-92212-2, 1992.

[Ze-Ru-So] YA.B. ZELDOVICH, A.A. RUZMAIKIN, D.D. SOKOLOFF. *The Almighty Chance*. World Scientific Lecture Notes in Physics 20. World Scientific, 1990.





# Prefacio

Antes de nada me gustaría aclarar que he llegado a esta asignatura casualmente, por ausencia de otras peticiones de docencia. Como la mayoría de los matemáticos, necesitando descansar del peso de las abstracciones puras, tengo interés en el tema, pero no un conocimiento especializado. Aunque la especialización sea en parte un contrasentido en una asignatura como ésta que trata de tocar superficialmente temas muy dispares, quiero indicar que no poseo un conocimiento íntegro, simultáneo y global de muchos modelos particulares. La selección de ellos ha sido bastante casual. En un principio escogí temas que me parecieron interesantes y que conocía o me gustaría conocer. Rechacé algunos por su dificultad, mientras que otros quedaron fuera simplemente porque ya me resultaba demasiado gravosa la escritura de estas notas y habían alcanzado una extensión suficiente para la duración del curso. Sirva todo esto para dejar meridianamente claro que las siguientes páginas tienen unas coordenadas bien definidas. Son para la asignatura X impartida el año Y por el profesor Z (no es mi identidad secreta). No pretendo de ninguna manera determinar los contenidos en cursos venideros ni insinuar las ventajas de los del presente.

En virtud de lo señalado anteriormente, no hay que buscar unidad en el fondo de los contenidos. No obstante he tratado de dar cierta uniformidad a la manera de presentarlos. Cada sección comienza con una introducción en la que se describen las leyes básicas involucradas en el fenómeno o problema a tratar. Después se establece un *diccionario* que conforma el modelo matemático propiamente dicho. Finalmente se prueban resultados que, la mayoría de las veces, sirven para anticipar nuevos fenómenos o explicar los ya conocidos. (Ni que decir tiene que en el mundo real las cosas son mucho más complicadas. A fin de cuentas todo es mentira y la Modelización no iba a ser excepcional). Cada sección se completa con sugerencias de temas de trabajo y algunos ejercicios. Al término de cada capítulo se describen experimentos caseros que he diseñado, y verificado con mis manazas, para que cualquiera los pueda llevar a cabo con éxito.

Por último, es justo dar crédito por algunas citas textuales. Las de la introducción están tomadas de [Yo], por exposición prolongada mientras escribía estas notas; los fragmentos tras las sugerencias de trabajos son de [Po], el único libro con citas a propósito que me dio tiempo a leer; y algunos de los experimentos y una pequeña parte del texto de los modelos están copiados de [Ch], sin permiso escrito del autor. Una vez que cada uno tiene lo suyo, sin más dilación, pasemos a ver la colección de modelos Primavera/Verano 2003.

Madrid, enero de 2003

Fernando Chamizo



## Intro

Observación, formulación de hipótesis, comprobación de hipótesis, formulación de la ley y expresión matemática de la ley. Según podemos leer en algún texto, éstas son las fases que conforman el método experimental en el que se fundamentan las llamadas actualmente ciencias naturales o experimentales, las que estudian los fenómenos de la Naturaleza. Todas estas fases, excepto quizá la primera, se ajustan a lo que se suele denominar Modelización (palabra que, por cierto, al igual que *modelizar*, no aparece en el diccionario), y la última a la Modelización Matemática en concreto. En resumidas cuentas, la Modelización es en gran medida el método de lo que en el lenguaje corriente se entiende como Ciencia. Lo que fue una aspiración en la Ilustración se ha convertido en realidad desde hace casi cien años, y es que la Ciencia se ha objetivado a través de la Tecnología y ha cambiado, para bien o para mal, la faz de la Tierra, marcando la dirección de progreso. Detrás de toda esa Tecnología que nos rodea, ocultos para la mayoría de los espectadores, están los modelos matemáticos. Nunca como ahora han sido las Matemáticas tan útiles, aunque la utilidad no sea esencial a ellas [Va 2]. Rechazar la Tecnología implica excluirse de la sociedad y civilización actuales, y rechazar las Matemáticas es perder la esperanza de comprender y crear la Tecnología.

*Satellites send me picture  
Get it in the eye, take it to the world  
spinning like a dynamo  
Feel it going round and round*

Los éxitos de la Ciencia en la comprensión de muchos fenómenos no deben dogmatizar su valor epistemológico. Modelizar es reflejar algunos aspectos de la *realidad*, pero la identificación de los modelos con la propia realidad es difícilmente sostenible. No podemos decir que el electrón no existiera antes del siglo XIX, ni que en las primeras décadas del siglo XX pasase de ser una esferita a una función que toma valores complejos. Es evidente que los modelos son reflejos parciales e imperfectos. Tampoco hay que exagerar el papel desempeñado por las Matemáticas ni su apriorismo, como hizo Galileo llegando a afirmar que “la verdad de la que nos dan conocimiento las demostraciones matemáticas, es la misma que conoce la sabiduría divina” ([Ga] p. 93). Es sorprendente que se pueda explicar en gran medida el átomo de hidrógeno representando el electrón como una función que resuelve una ecuación en derivadas parciales con coeficientes complejos, y un físico de la talla de E.P. Wigner dirá que “la enorme utilidad de las Matemáticas en las ciencias naturales es algo que raya el misterio”. Sin embargo, también es cierto que las derivadas y los números complejos no son elucubraciones completamente artificiales. La derivada se creó tratando de entender fenómenos mecánicos y es heredera de la noción de velocidad; y los números complejos, aunque su origen fue otro, sirven para representar algo tan natural como los giros en el plano, y por tanto son adecuados para indicar una fase en la onda asociada

al electrón. No podemos explicar matemáticamente el electrón con las Matemáticas que desconocemos, y por ello debemos echar mano de conocimientos previos; pero también los modelos sugieren naturalmente nuevos entes matemáticos. No es tan milagroso que en Mecánica Cuántica se emplee el Análisis Funcional habida cuenta que el desarrollo de éste estuvo ligado a los problemas que surgieron de ella. En definitiva, los modelos no están subordinados a las Matemáticas sino que también los modelos sirven para crear Matemáticas.

*Who made who, who made you?  
 Who made who, ain't nobody told you?  
 Who made who, who made you?  
 If you made them and they made you  
 Who picked up the bill, and who made who?*

Una vez rechazada la realidad de los modelos y sustituida por un reflejo lo más fiel posible, cabe preguntarse qué otras propiedades son deseables a la hora de crear un modelo. Quizá la principal sea la simplicidad, la economía en la descripción. A ésta hay que añadir algo completamente fundamental en Matemáticas, la belleza, la estética del resultado. Pero no hay que permitir que en favor de ella se subvierta el proceso de modelización. Por ejemplo, la idea heredada de los griegos clásicos de que la circunferencia es la curva más bella y perfecta repercutió en el error, mantenido hasta comienzos del siglo XVII, de que los movimientos planetarios eran composiciones de movimientos circulares, error en el que también incurrieron Copérnico y su gran apólogo Galileo ([Ga] p.18). Con respecto al principio de economía, no es casual que dentro de la historia del pensamiento apareciera explícitamente con el nominalismo de Ockham, que marca el final de la Edad Media y el despertar de la Ciencia. Hasta entonces la razón y la fe no estaban perfectamente separadas. Ockham utiliza su famosa navaja (el principio de economía) para dar prioridad a los conocimientos intuitivos directos provenientes de observaciones individuales y desligarlos de la fe. Es el comienzo del camino de la Ciencia en el que se adentrarían ya algunos de sus inmediatos seguidores.

*Here comes the razor's edge  
 Here comes the razor's edge  
 Well here it comes to cut to shreds  
 The razors edge*

El nominalismo y más tarde el empirismo señalaron el papel fundamental desempeñado por la experiencia y los experimentos en el conocimiento. Por otra parte se hace evidente el problema de inducción incompleta, consistente en la contradicción que supone tratar de verificar juicios universales a partir de un número finito de experimentos singulares quizá imperfectos. La historiografía científica a menudo ha deificado el valor decisorio del experimento, como si la veracidad de una teoría quedara inmediata y fácilmente sentenciada yendo a un laboratorio; y simultáneamente ha suavizado su valor gnoseológico

para exagerar la gloria de los grandes científicos. Es posible criticar estas dos tendencias a partir de casos sacados incluso de la aristocracia de la Ciencia. Por ejemplo, Einstein y de Haas midieron el valor de una constante atómica (la relación giromagnética) a partir de la torsión de ciertas barras metálicas, corroborando que coincidía con el predicho por la teoría. En realidad, su valor es dos veces mayor que el que midieron debido al *spin*, entonces desconocido. No hay razón para sospechar que manipulasen los resultados, simplemente sus prejuicios al obtenerlos motivaron el error. Como ejemplo de la segunda tendencia, a veces se presenta la rotación del perihelio de Mercurio como un experimento confirmando la relatividad general, cuando realmente al crear la ecuación fundamental de esta teoría, Einstein buscó ajustarla para que respondiera a este fenómeno observado muchísimo antes. La experimentación no es un trabajo sucio pero necesario o conveniente para verificar posibles errores, como la prueba del nueve de la multiplicación, sino que es crucial en la elaboración de los modelos. Tampoco es un trabajo fácil, ni un juez inapelable e infalible que automáticamente da un veredicto. Por ejemplo, si alguien tratase de medir por sí mismo sin instrumental sofisticado la aceleración de la gravedad llevando a la práctica los problemas de tiro parabólico de balones o piedras de los manuales básicos de Física, no obtendría un valor medianamente parecido, y sin embargo no es difícil conseguir un resultado muy preciso empleando un sencillito péndulo. La realización del experimento presupone conocer la gran influencia del rozamiento del aire en el tiro parabólico, y la poca en el periodo del péndulo. Es científicamente un poco tramposo discriminar las experiencias sin más explicaciones para ponderar la realidad de una teoría.

*For a fee  
I'm happy to be  
Your back door man*

*Dirty Deeds Done Dirt Cheap  
Dirty Deeds and they're Done Dirt Cheap*

La falibilidad de los experimentos y su dependencia de unos modelos que no están desligados del momento histórico ni son totalmente fieles, pueden conducir a una visión escéptica del valor de la Ciencia. Esta actitud que recoge Poincaré en alguno de sus contemporáneos ([Po] cap. X), y critica poderosamente, corresponde a un nominalismo exagerado, por el cual la Ciencia estaría compuesta de convenciones, de nombres, en las que descansa su aparente certeza. De manera que los hechos científicos son una obra artificial debida a los propios investigadores. Hoy en día este punto de vista está muy atenuado por la gran repercusión de la Tecnología pero no exento de ciertas motivaciones. Tómese como ejemplo el neutrino, ésta es una partícula elemental que se introdujo en 1930 con el único fin de explicar una falta de energía en la desintegración beta. Casi por definición, no tenía masa (ahora se cree que puede ser insignificante) ni carga y podría recorrer distancias casi astronómicas sin interactuar con la materia; incluso el denostado

éter lumínico tenía propiedades físicas más tangibles. En 1953 se registro el neutrino y pasó a ser una realidad científica. El experimento duró miles de horas y lo que se midió realmente fue que ciertas reacciones que conjeturalmente tenían lugar tras la muerte del neutrino, se producían con la probabilidad esperada. Si solamente se toma en cuenta esto, cabe preguntarse hasta qué punto el neutrino fue sólo un nombre artificial para cubrir un hueco en un modelo forzando la conservación de la energía. La misma crítica, y con mayor fundamento, se puede hacer ante muchos “descubrimientos definitivos” que nos presentan los diarios acerca de la Cosmología, durante bastante tiempo una de las áreas más divulgadas de la Ciencia. No hace falta ir al interior del átomo ni a los confines del Universo para darse cuenta de que muchas veces ante nuestras infantiles preguntas del porqué de las cosas, que son la base de la Ciencia, nos contentamos con poco más que los niños. Por citar un ejemplo relacionado con uno de los capítulos más originales de [Fe-Le-Sa], considérese algo tan común como una tormenta. Siempre se nos ha dicho que el rayo es una descarga eléctrica. Esto es como decir que tiene relación con las chispas en un cortocircuito de un enchufe casero, lo cual ya es bastante y a Franklin le dio gran prestigio cuando todavía no existían los enchufes, pero muy pocos se plantean que esto lleva a infinidad de preguntas sencillas aparentemente sin respuesta, ¿por qué hay una diferencia de potencial entre el cielo y la tierra si están en contacto?, ¿por qué se produce la descarga súbitamente?, ¿por qué después de ésta no se igualan los potenciales? De modo que cabe preguntarse si ha añadido más al conocimiento de los no expertos saber que el rayo es eléctrico, del que añadió a los antiguos griegos pensar que era la manifestación de Zeus tonante. La Ciencia, y la modelización que entraña, trata de ir más allá, y no sólo de poner nombre a los fenómenos, sino tratar de explicarlos desde primeras causas, en definitiva, de racionalizarlos.

*My mind raced  
And I thought what could I do (Thunder)  
And I knew  
There was no help, no help from you (Thunder)*

*Sound of the drums  
Beatin' in my heart  
The thunder of guns  
Tore me apart  
You've been - thunderstruck*