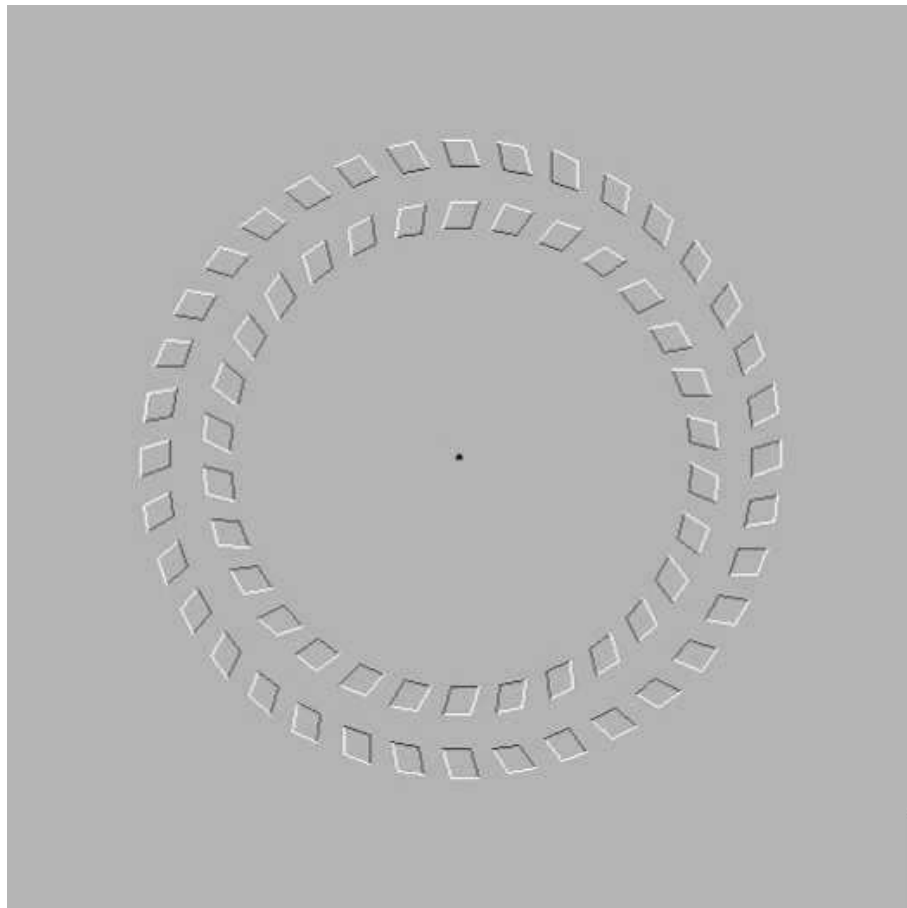


# Modelización II

(un pase de modelos)



ente Fernand  
2003  
L o z i m a h C o



# Contenidos

- **Introducción**

- **Modelos de la Mecánica**

- La braquistocrona.
- Mecánica lagrangiana.
- Movimiento giroscópico.
- Películas de jabón.

*Experiencias*

- **Ondas**

- Transmisión del calor.
- El formato JPEG.
- Ondas electromagnéticas.

*Experiencias*

- **Tomografía.**

- Reconstrucción algebraica.
- Transformada de Radon.

*Experiencias*

- **Modelos probabilísticos.**

- El teorema central del límite.
- Paseos aleatorios.
- Difusión y movimiento browniano.

*Experiencias*

- **Fluidos**

- Ecuaciones de Euler.
- Fluidos estacionarios irrotacionales.
- Ecuaciones de Navier-Stokes.

*Experiencias*

- **Direcciones en la red**

- **Programas**

# Referencias

- [**Al-Fi**] M. ALONSO, E.J. FINN. *Física*. Vol. I, II. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [**Al-Ta**] F. ALMGREN, J.E. TAYLOR. *The Geometry of Soap Bubbles and Soap Films*. Scientific American 235 (1976), no. 1, 82-93.
- [**Ch**] F. CHAMIZO. *Cálculo III (El cálculo de segundo es muy fácil)*. UAM 2001. Disponible en versión electrónica en <http://www.uam.es/fernando.chamizo>.
- [**Ch-Ma**] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 1979.
- [**Co**] A. CÓRDOBA. *El método de Fourier y la difracción de la luz: un ensayo*. Incluido en *La Luz: el Ayer, el Hoy y el Mañana*. F. Jaque Rechea y J. García Solé (Editores). Alianza Universidad 842. Alianza Editorial, 1996.
- [**Co-Hi**] R. COURANT, D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publishers, 1953.
- [**Do**] M.P. DO CARMO *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Universidad Textos 135. Alianza, 1990.
- [**Du-Fo-No**] B.A. DUBROVIN, A.T. FOMENKO, S.P. NOVIKOV. *Modern Geometry - Methods and Applications (Part I)*. Graduate Texts in Mathematics 93. Springer-Verlag, 1984.
- [**Dy-Mc**] H. DYM, H.P. MCKEAN. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, 1972.
- [**Fe**] W. FELLER. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley, 1971.
- [**Fe-Le-Sa**] R.P. FEYNMAN, R.B. LEIGHTON, M. SANDS. *Física*. Vol. II. Electromagnetismo y materia. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [**Fo**] J. FOURIER. *Teoría Analítica del Calor*. Universidad Politécnica de Madrid, 1992.
- [**Ga**] G. GALILEI. *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*. Alianza Editorial, 1994.
- [**Ge**] N.A. GERSHENFELD. *The Nature of Mathematical Modeling*. Alianza Editorial, 1995.
- [**Go**] H. GOLDSTEIN. *Mecánica Clásica*. Reverté, 1988.
- [**Gl**] L.I. GOLOVINA. *Álgebra Lineal y algunas de sus aplicaciones*. Mir, 1974.

[Gr-Ry] I.S. GRADSHTEYN, I.M. RYZHIK. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1994.

[Gr] C.W. GROETSCH. *Inverse Problems: activities for undergraduates*. Mathematical Association of America, 1999.

[He-Jo-Bu] M.T. HEIDEMAN, D.H. JOHNSON, C.S. BURRUS. *Gauss and the history of the fast Fourier transform*. Arch. Hist. Exact Sci. 34 (1985), no. 3, 265-277.

[Hi-Tr] S. HILDEBRANDT, A. TROMBA. *Mathematics and Optimal Form*. Scientific American Library, 1985.

[Hu-Ma] T.J.R. HUGHES, J.E. MARSDEN. *A Short Course in Fluid Mechanics*. Mathematics Lecture Series 6. Publish or Perish, 1976.

[Is] C. ISENBERG. *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*. Dover Books Explaining Science. Dover, 1992.

[Ju] YA. JURGUIN. *Bueno, ¿y qué?* Mir, 1973.

[Ka-Sl] A.C. KAK, M. SLANEY. *Principles of Computerized Tomography Imaging*. IEEE Press 1988. (También disponible en <http://www.slaney.org/pct/pct-toc.html>).

[Ko] V.S. KOROLIUK. *Manual de la Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática*. Mir, 1981.

[La] C. LANZOS. *The Variational Principles of Mechanics*. Mathematical Expositions 4. University of Toronto Press, 1970.

[Ma] S. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.

[Ma-Pu] C. MARCHIORO, M. PULVIRENTI. *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*. Springer-Verlag, 1994.

[Mx] J.C. MAXWELL. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. I, II. Oxford Classic Series. Clarendon Press, 1998.

[Mz] J. MAZUMDAR. *An Introduction to Mathematical Physiology and Biology*. Cambridge Studies in Mathematical Biology 15. Cambridge University Press 1999.

[Mo] F. MORGAN. *Geometric Measure Theory: a beginner's guide*. Academic Press, 1988.

[Mu] J. MUÑOZ SANTONJA. *Newton: el umbral de la ciencia moderna*. La Matemática en sus personajes 3. Nivola libros, 1999.

[Na] F. NATTERER. *Mathematical models for medical imaging*. Computational radiology and imaging (Minneapolis, MN, 1997), 17-32, IMA Vol. Math. Appl. 110. Springer, 1999.

[Po] H. POINCARÉ. *El Valor de la Ciencia*. Austral 628. Serie Marrón: Ciencia y técnica. Clásicos de la Ciencia. Espasa Calpe, 1964.

[Ra-Ka] A.G. RAMM, A.I. KATSEVICH. *The Radon Transform and Local Tomography*. CRC Press, 1996.

[Ru] J. RUIZ VÁZQUEZ. *Física*. Selecciones Científicas, 1978.

[Sm-So-Wa] K.T. SMITH, D.C. SOLMON, S.L. WAGNER. *Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs*. Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), no. 6, 1227–1270.

[Sp] M. SPIVAK. *Cálculo Infinitesimal*. Calculus. Vol. I, II. Reverté, 1984.

[St-Bu] J. STOER, R. BULIRSCH. *Introduction to Numerical Analysis*. (2nd edition). Texts in Applied Mathematics 12. Springer 1993.

[Ta] M.E. TAYLOR. *Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematics 23. Springer 1996.

[Ti] V.M. TIKHOMIROV. *Stories about Maxima and Minima*. Mathematical World, Vol. 1. Mathematical Association of America, 1990.

[Va 1] J.L. VÁZQUEZ. *Lecciones de Mecánica de Fluidos*. Universidad Autónoma de Madrid 1997.

[Va 2] J.L. VÁZQUEZ. *Matemáticas, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera*. UAM 2002. (Disponible en: <http://www.uam.es/juanluis.vazquez>). Es versión actualizada en español de *The importance of Mathematics in the development of Science and Technology*. Boletín Soc. Esp. Mat. Aplicada 19, (2001), 69-112.

[Wa] G.K. WALLACE. *The JPEG still picture compression standard*. Communications of the ACM 34 (4) (1991), 30–44.

[We] G.L. WEISS. *Harmonic Analysis*. Incluido en *The Chauvenet papers: a collection of prize-winning expository papers in Mathematics*. (Ed. J.C. Abbott). Mathematical Association of America, 1978.

[Yn] F.J. YNDURÁIN. *Mecánica Cuántica*. Alianza Universidad Textos. Alianza, 1988.

[Yo] A. YOUNG (ET AL.). *AC/DC Live*. Disc I. Atco 7567-92212-2, 1992.

[Ze-Ru-So] YA.B. ZELDOVICH, A.A. RUZMAIKIN, D.D. SOKOLOFF. *The Almighty Chance*. World Scientific Lecture Notes in Physics 20. World Scientific, 1990.





# Prefacio

Antes de nada me gustaría aclarar que he llegado a esta asignatura casualmente, por ausencia de otras peticiones de docencia. Como la mayoría de los matemáticos, necesitando descansar del peso de las abstracciones puras, tengo interés en el tema, pero no un conocimiento especializado. Aunque la especialización sea en parte un contrasentido en una asignatura como ésta que trata de tocar superficialmente temas muy dispares, quiero indicar que no poseo un conocimiento íntegro, simultáneo y global de muchos modelos particulares. La selección de ellos ha sido bastante casual. En un principio escogí temas que me parecieron interesantes y que conocía o me gustaría conocer. Rechacé algunos por su dificultad, mientras que otros quedaron fuera simplemente porque ya me resultaba demasiado gravosa la escritura de estas notas y habían alcanzado una extensión suficiente para la duración del curso. Sirva todo esto para dejar meridianamente claro que las siguientes páginas tienen unas coordenadas bien definidas. Son para la asignatura X impartida el año Y por el profesor Z (no es mi identidad secreta). No pretendo de ninguna manera determinar los contenidos en cursos venideros ni insinuar las ventajas de los del presente.

En virtud de lo señalado anteriormente, no hay que buscar unidad en el fondo de los contenidos. No obstante he tratado de dar cierta uniformidad a la manera de presentarlos. Cada sección comienza con una introducción en la que se describen las leyes básicas involucradas en el fenómeno o problema a tratar. Después se establece un *diccionario* que conforma el modelo matemático propiamente dicho. Finalmente se prueban resultados que, la mayoría de las veces, sirven para anticipar nuevos fenómenos o explicar los ya conocidos. (Ni que decir tiene que en el mundo real las cosas son mucho más complicadas. A fin de cuentas todo es mentira y la Modelización no iba a ser excepcional). Cada sección se completa con sugerencias de temas de trabajo y algunos ejercicios. Al término de cada capítulo se describen experimentos caseros que he diseñado, y verificado con mis manazas, para que cualquiera los pueda llevar a cabo con éxito.

Por último, es justo dar crédito por algunas citas textuales. Las de la introducción están tomadas de [Yo], por exposición prolongada mientras escribía estas notas; los fragmentos tras las sugerencias de trabajos son de [Po], el único libro con citas a propósito que me dio tiempo a leer; y algunos de los experimentos y una pequeña parte del texto de los modelos están copiados de [Ch], sin permiso escrito del autor. Una vez que cada uno tiene lo suyo, sin más dilación, pasemos a ver la colección de modelos Primavera/Verano 2003.

Madrid, enero de 2003

Fernando Chamizo



## Intro

Observación, formulación de hipótesis, comprobación de hipótesis, formulación de la ley y expresión matemática de la ley. Según podemos leer en algún texto, éstas son las fases que conforman el método experimental en el que se fundamentan las llamadas actualmente ciencias naturales o experimentales, las que estudian los fenómenos de la Naturaleza. Todas estas fases, excepto quizá la primera, se ajustan a lo que se suele denominar Modelización (palabra que, por cierto, al igual que *modelizar*, no aparece en el diccionario), y la última a la Modelización Matemática en concreto. En resumidas cuentas, la Modelización es en gran medida el método de lo que en el lenguaje corriente se entiende como Ciencia. Lo que fue una aspiración en la Ilustración se ha convertido en realidad desde hace casi cien años, y es que la Ciencia se ha objetivado a través de la Tecnología y ha cambiado, para bien o para mal, la faz de la Tierra, marcando la dirección de progreso. Detrás de toda esa Tecnología que nos rodea, ocultos para la mayoría de los espectadores, están los modelos matemáticos. Nunca como ahora han sido las Matemáticas tan útiles, aunque la utilidad no sea esencial a ellas [Va 2]. Rechazar la Tecnología implica excluirse de la sociedad y civilización actuales, y rechazar las Matemáticas es perder la esperanza de comprender y crear la Tecnología.

*Satellites send me picture  
Get it in the eye, take it to the world  
spinning like a dynamo  
Feel it going round and round*

Los éxitos de la Ciencia en la comprensión de muchos fenómenos no deben dogmatizar su valor epistemológico. Modelizar es reflejar algunos aspectos de la *realidad*, pero la identificación de los modelos con la propia realidad es difícilmente sostenible. No podemos decir que el electrón no existiera antes del siglo XIX, ni que en las primeras décadas del siglo XX pasase de ser una esferita a una función que toma valores complejos. Es evidente que los modelos son reflejos parciales e imperfectos. Tampoco hay que exagerar el papel desempeñado por las Matemáticas ni su apriorismo, como hizo Galileo llegando a afirmar que “la verdad de la que nos dan conocimiento las demostraciones matemáticas, es la misma que conoce la sabiduría divina” ([Ga] p. 93). Es sorprendente que se pueda explicar en gran medida el átomo de hidrógeno representando el electrón como una función que resuelve una ecuación en derivadas parciales con coeficientes complejos, y un físico de la talla de E.P. Wigner dirá que “la enorme utilidad de las Matemáticas en las ciencias naturales es algo que raya el misterio”. Sin embargo, también es cierto que las derivadas y los números complejos no son elucubraciones completamente artificiales. La derivada se creó tratando de entender fenómenos mecánicos y es heredera de la noción de velocidad; y los números complejos, aunque su origen fue otro, sirven para representar algo tan natural como los giros en el plano, y por tanto son adecuados para indicar una fase en la onda asociada

al electrón. No podemos explicar matemáticamente el electrón con las Matemáticas que desconocemos, y por ello debemos echar mano de conocimientos previos; pero también los modelos sugieren naturalmente nuevos entes matemáticos. No es tan milagroso que en Mecánica Cuántica se emplee el Análisis Funcional habida cuenta que el desarrollo de éste estuvo ligado a los problemas que surgieron de ella. En definitiva, los modelos no están subordinados a las Matemáticas sino que también los modelos sirven para crear Matemáticas.

*Who made who, who made you?  
 Who made who, ain't nobody told you?  
 Who made who, who made you?  
 If you made them and they made you  
 Who picked up the bill, and who made who?*

Una vez rechazada la realidad de los modelos y sustituida por un reflejo lo más fiel posible, cabe preguntarse qué otras propiedades son deseables a la hora de crear un modelo. Quizá la principal sea la simplicidad, la economía en la descripción. A ésta hay que añadir algo completamente fundamental en Matemáticas, la belleza, la estética del resultado. Pero no hay que permitir que en favor de ella se subvierta el proceso de modelización. Por ejemplo, la idea heredada de los griegos clásicos de que la circunferencia es la curva más bella y perfecta repercutió en el error, mantenido hasta comienzos del siglo XVII, de que los movimientos planetarios eran composiciones de movimientos circulares, error en el que también incurrieron Copérnico y su gran apólogo Galileo ([Ga] p. 18). Con respecto al principio de economía, no es casual que dentro de la historia del pensamiento apareciera explícitamente con el nominalismo de Ockham, que marca el final de la Edad Media y el despertar de la Ciencia. Hasta entonces la razón y la fe no estaban perfectamente separadas. Ockham utiliza su famosa navaja (el principio de economía) para dar prioridad a los conocimientos intuitivos directos provenientes de observaciones individuales y desligarlos de la fe. Es el comienzo del camino de la Ciencia en el que se adentrarían ya algunos de sus inmediatos seguidores.

*Here comes the razor's edge  
 Here comes the razor's edge  
 Well here it comes to cut to shreds  
 The razors edge*

El nominalismo y más tarde el empirismo señalaron el papel fundamental desempeñado por la experiencia y los experimentos en el conocimiento. Por otra parte se hace evidente el problema de inducción incompleta, consistente en la contradicción que supone tratar de verificar juicios universales a partir de un número finito de experimentos singulares quizá imperfectos. La historiografía científica a menudo ha deificado el valor decisorio del experimento, como si la veracidad de una teoría quedara inmediata y fácilmente sentenciada yendo a un laboratorio; y simultáneamente ha suavizado su valor gnoseológico

para exagerar la gloria de los grandes científicos. Es posible criticar estas dos tendencias a partir de casos sacados incluso de la aristocracia de la Ciencia. Por ejemplo, Einstein y de Haas midieron el valor de una constante atómica (la relación giromagnética) a partir de la torsión de ciertas barras metálicas, corroborando que coincidía con el predicho por la teoría. En realidad, su valor es dos veces mayor que el que midieron debido al *spin*, entonces desconocido. No hay razón para sospechar que manipulasen los resultados, simplemente sus prejuicios al obtenerlos motivaron el error. Como ejemplo de la segunda tendencia, a veces se presenta la rotación del perihelio de Mercurio como un experimento confirmando la relatividad general, cuando realmente al crear la ecuación fundamental de esta teoría, Einstein buscó ajustarla para que respondiera a este fenómeno observado muchísimo antes. La experimentación no es un trabajo sucio pero necesario o conveniente para verificar posibles errores, como la prueba del nueve de la multiplicación, sino que es crucial en la elaboración de los modelos. Tampoco es un trabajo fácil, ni un juez inapelable e infalible que automáticamente da un veredicto. Por ejemplo, si alguien tratase de medir por sí mismo sin instrumental sofisticado la aceleración de la gravedad llevando a la práctica los problemas de tiro parabólico de balones o piedras de los manuales básicos de Física, no obtendría un valor medianamente parecido, y sin embargo no es difícil conseguir un resultado muy preciso empleando un sencillo péndulo. La realización del experimento presupone conocer la gran influencia del rozamiento del aire en el tiro parabólico, y la poca en el periodo del péndulo. Es científicamente un poco tramposo discriminar las experiencias sin más explicaciones para ponderar la realidad de una teoría.

*For a fee  
I'm happy to be  
Your back door man*

*Dirty Deeds Done Dirt Cheap  
Dirty Deeds and they're Done Dirt Cheap*

La falibilidad de los experimentos y su dependencia de unos modelos que no están desligados del momento histórico ni son totalmente fieles, pueden conducir a una visión escéptica del valor de la Ciencia. Esta actitud que recoge Poincaré en alguno de sus contemporáneos ([Po] cap. X), y critica poderosamente, corresponde a un nominalismo exagerado, por el cual la Ciencia estaría compuesta de convenciones, de nombres, en las que descansa su aparente certeza. De manera que los hechos científicos son una obra artificial debida a los propios investigadores. Hoy en día este punto de vista está muy atenuado por la gran repercusión de la Tecnología pero no exento de ciertas motivaciones. Tómese como ejemplo el neutrino, ésta es una partícula elemental que se introdujo en 1930 con el único fin de explicar una falta de energía en la desintegración beta. Casi por definición, no tenía masa (ahora se cree que puede ser insignificante) ni carga y podría recorrer distancias casi astronómicas sin interactuar con la materia; incluso el denostado

éter lumínico tenía propiedades físicas más tangibles. En 1953 se registro el neutrino y pasó a ser una realidad científica. El experimento duró miles de horas y lo que se midió realmente fue que ciertas reacciones que conjeturalmente tenían lugar tras la muerte del neutrino, se producían con la probabilidad esperada. Si solamente se toma en cuenta esto, cabe preguntarse hasta qué punto el neutrino fue sólo un nombre artificial para cubrir un hueco en un modelo forzando la conservación de la energía. La misma crítica, y con mayor fundamento, se puede hacer ante muchos “descubrimientos definitivos” que nos presentan los diarios acerca de la Cosmología, durante bastante tiempo una de las áreas más divulgadas de la Ciencia. No hace falta ir al interior del átomo ni a los confines del Universo para darse cuenta de que muchas veces ante nuestras infantiles preguntas del porqué de las cosas, que son la base de la Ciencia, nos contentamos con poco más que los niños. Por citar un ejemplo relacionado con uno de los capítulos más originales de [Fe-Le-Sa], considérese algo tan común como una tormenta. Siempre se nos ha dicho que el rayo es una descarga eléctrica. Esto es como decir que tiene relación con las chispas en un cortocircuito de un enchufe casero, lo cual ya es bastante y a Franklin le dio gran prestigio cuando todavía no existían los enchufes, pero muy pocos se plantean que esto lleva a infinidad de preguntas sencillas aparentemente sin respuesta, ¿por qué hay una diferencia de potencial entre el cielo y la tierra si están en contacto?, ¿por qué se produce la descarga súbitamente?, ¿por qué después de ésta no se igualan los potenciales? De modo que cabe preguntarse si ha añadido más al conocimiento de los no expertos saber que el rayo es eléctrico, del que añadió a los antiguos griegos pensar que era la manifestación de Zeus tonante. La Ciencia, y la modelización que entraña, trata de ir más allá, y no sólo de poner nombre a los fenómenos, sino tratar de explicarlos desde primeras causas, en definitiva, de racionalizarlos.

*My mind raced  
And I thought what could I do (Thunder)  
And I knew  
There was no help, no help from you (Thunder)*

*Sound of the drums  
Beatin' in my heart  
The thunder of guns  
Tore me apart  
You've been - thunderstruck*

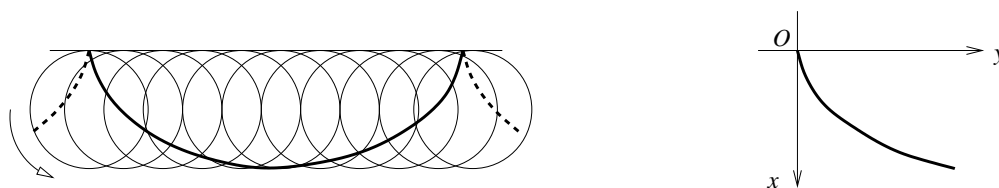
# 1. Modelos de la Mecánica

## 1.1. Te diste mucha prisa

El famoso problema de la braquistocrona no sólo permite contar una bella historia que incluso es verdad, sino que estuvo en el origen de una nueva área de las Matemáticas, el Cálculo de Variaciones, que más tarde y hasta nuestros días se revelaría como fundamental para entender la Mecánica en cualquiera de sus variantes (clásica, relativista, cuántica). En este terreno las famosas palabras de Euler: “Nada tiene lugar en el mundo cuyo significado no sea el de algún máximo o mínimo” [Ti] se han vuelto proféticas.

El problema fue propuesto en 1696 por Johann Bernoulli (de los Bernoulli de toda la vida, la famosa y no muy bien avenida familia de Matemáticos de los siglos XVII y XVIII) como un reto a la comunidad científica. Consiste en encontrar la curva, digamos la forma del tobogán, que une dos puntos de manera que los cuerpos, digamos humanos, que caen por ella lo hagan en el menor tiempo posible. De ahí lo de *braquistocrona*, del griego  $\beta\rho\alpha\chi\nu\varsigma$ =breve y  $\chi\rho\nu\nu\omicron\varsigma$ =tiempo. Varios matemáticos ilustres respondieron al reto resolviéndolo. Entre ellos Newton, al que sólo le llevó unas horas (Newton tenía la habilidad de humillar a sus adversarios y también la de ser un genio). De su solución, publicada anónimamente, dijo J. Bernoulli que podía reconocer “al león por sus garras” [Mu].

Una primera conjetura que se podría hacer es que la braquistocrona es una recta, a fin de cuentas la recta es la curva más corta que une dos puntos. Pero basta realizar unos cálculos para percatarse de que los niños se divertirán más en menos tiempo con un arco curvo. De hecho ya Galileo, mucho antes de la propuesta de Bernoulli, pensaba erróneamente que la braquistocrona era un arco de circunferencia [Ti]. La solución correcta, sin embargo, es un arco de cicloide, la curva descrita por un punto en el borde de una moneda que rueda a lo largo de una regla. Concretamente es un arco que parte de uno de sus puntos picudos.



Situemos un sistema de coordenadas en el punto de partida  $O$ , girado  $-\pi/2$  con respecto a su posición habitual, para que la coordenada  $x$  mida la altura desde  $O$ . Como la aceleración de la gravedad es  $g$ , para un cuerpo en caída libre (quitamos la curva) la altura en función del tiempo es  $x = \frac{1}{2}gt^2$  y la velocidad  $v = gt$ , así que  $v = \sqrt{2gx}$ . Por el principio de conservación de la energía ( $\frac{1}{2}mv^2 = mgx$ ) esta última fórmula sigue siendo

cierta para un cuerpo que cae a lo largo de una curva. Por la definición de velocidad y la regla de la cadena

$$v \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dx} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gx}}$$

Entonces el tiempo que se tarda en salvar una altura  $H$  a lo largo de cierta curva  $y = y(x)$  es

$$T = \int_0^H \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gx}} dx.$$

Dados  $H$  e  $y(H)$ , tenemos que buscar la función  $y = y(x)$  que haga mínimo  $T$ .

Diccionario:

- Forma del tobogán  $\rightarrow$  Función  $y = y(x)$  con  $y(0) = 0$ .
- Tiempo de caída  $\rightarrow T = \int_0^H \sqrt{(1 + (y'(x))^2)/(2gx)} dx$ .
- Braquistocrona  $\rightarrow$  Función uniendo  $(0, 0)$  y  $(H, y(H))$  para la que  $T$  es mínimo.

Lo que necesitamos es una especie de método de máximos y mínimos “a lo grande” donde los puntos son sustituidos por funciones. Resulta que esto no es tan difícil como pudiera parecer al principio (si damos por supuestas la existencia y unicidad), y con el truco universal de integrar por partes se deduce del método de máximos y mínimos de Cálculo I. (Una forma alternativa de complicar las cosas siguiendo a Euler es considerar que una función es un montón de puntos muy próximos y emplear Cálculo II o Cálculo III, [La] p. 52, [Ch] p. 73).

**Proposición 1.1.** *Sea  $F \in C^2$ . Si la integral*

$$I = \int_a^b F(y(x), y'(x), x) dx$$

*alcanza un extremo (máximo o mínimo) en el conjunto de funciones  $C^2([a, b])$  que verifican  $y(a) = c$ ,  $y(b) = d$ ; entonces la función para la que se alcanza dicho extremo debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y}$$



donde  $\partial F/\partial y$  y  $\partial F/\partial y'$  indican las derivadas con respecto a la primera y segunda variables, y se suponen evaluadas en  $(y(x), y'(x), x)$ .

Nota: El Cálculo de Variaciones es una rama de las Matemáticas que se ocupa principalmente de calcular extremos de expresiones integrales similares a  $I$  (funcionales), en las que el integrando depende de ciertas funciones incógnita.

DEM.: Supongamos que el extremo se alcanza para  $y = y_0(x)$ , y sea  $\eta \in C^\infty$  con  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  arbitraria. Entonces la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$f(\epsilon) = \int_a^b F(y_0(x) + \epsilon\eta(x), y_0'(x) + \epsilon\eta'(x), x) dx$$

debe alcanzar un extremo en  $\epsilon = 0$ . Por consiguiente

$$0 = f'(0) = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx.$$

Integrando por partes el segundo sumando del integrando, se deduce

$$0 = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta dx.$$

Como  $\eta$  es una función  $C^\infty$  arbitraria salvo porque se anula en los extremos, la única posibilidad es que el otro factor sea nulo. ■

En el caso de la braquistocrona, si cerramos los ojos ante la singularidad en  $x = 0$  y confiamos en que es parte del enunciado que la función  $y$  en la que se alcanza el mínimo sea regular, podemos aplicar la proposición anterior con  $F = \sqrt{(1 + (y')^2)/(2gx)}$ . Evidentemente  $\partial F/\partial y = 0$  y

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cte} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{2gx(1 + y'^2)}} = \text{cte}.$$

Esta constante sólo se anula en el caso de caída libre que no consideramos. Escribámosla por conveniencia como  $1/\sqrt{4gC}$ , entonces la ecuación anterior, después de despejar, es

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2C - x}}.$$

Por tanto basta calcular la integral de  $\sqrt{x}/\sqrt{2C - x}$ . Uno puede conseguirlo con sus propias

manos, con esfuerzo, llevando a cabo algunos cambios de variable, o con menos esfuerzo utilizándolas para coger el pesado tomo [Gr-Ry] (véase 2.225.2 con  $x = 1/t$ ), pero es más conveniente para presentar la solución efectuar un solo cambio de variable llovido del cielo dado por  $x = C(1 - \cos u)$ . Con él la integral se transforma en

$$C \int \frac{\sin u \sqrt{1 - \cos u}}{1 + \cos u} du = C \int \frac{\sin u \sqrt{(1 - \cos u)^2}}{1 - \cos^2 u} du = C \int (1 - \cos u) du = C(u - \sin u).$$

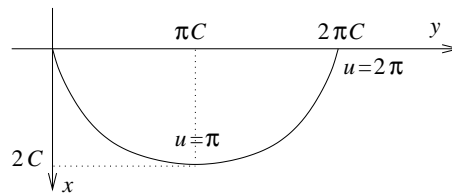
De este modo, la braquistocrona en forma paramétrica responde a la ecuación de la cicloide

$$(1.1) \quad x = C(1 - \cos u), \quad y = C(u - \sin u).$$

La constante  $C$  se ajusta de forma que para  $x = H$ ,  $y$  tome el valor  $y(H)$  especificado.

El problema que plantea la singularidad en  $x = 0$  no es relevante porque siempre en la demostración de la proposición se puede imponer que la función  $\eta$  tienda a cero en los extremos tan rápido como se desee “matando” la singularidad.

Cuando  $u$  varía en  $[0, 2\pi]$ , la  $x$  decrece en la segunda mitad del intervalo y por tanto no define una función (univaluada)  $y = y(x)$ .



El punto de retroceso corresponde a  $x = 2C$ ,  $y = \pi C$ . De modo que para condiciones iniciales con  $y(H) > \pi H/2$  el tobogán dado por la braquistocrona se comba hacia arriba, lo cual no es muy intuitivo: todos diríamos que para ir rápido por un tobogán siempre deberíamos bajar. Si  $y$  no es una función de  $x$  el razonamiento antes empleado para deducir la ecuación (1.1) a través de la proposición no tiene sentido, pero todo vuelve a funcionar buscando ahora una solución en la que los nombres de los ejes estén intercambiados.

Epílogo: Al igual que en el cálculo de una variable existe un criterio de la derivada segunda, en el Cálculo de Variaciones existe la llamada *segunda variación* para detectar si algo es un máximo o un mínimo [La], [Du-Fo-No] §36. Pero se muestra mucho menos eficiente que en Cálculo I. La dificultad es esencialmente topológica: es mucho más difícil trabajar con espacios de dimensión infinita, los de funciones, que con los números reales. Incluso teoremas tan naturales como los “tres teoremas fuertes” de [Sp], pueden ser complicadísimos o incluso falsos.

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Deducir la ecuación de Euler-Lagrange para  $\int_a^b F(y, y', x) dx$ .  
 b) Obtener la fórmula que da el tiempo de caída en función de la forma del tobogán.

2) Probar que la cicloide  $x = C(1 - \cos u)$ ,  $y = C(u - \sin u)$ , corresponde a la curva descrita por un punto en el borde de una moneda que rueda a lo largo de una regla situada en el eje  $Y$ . ¿De qué radio es la moneda?

3) En la Luna (gravedad menor) o en Júpiter (gravedad mayor), ¿tiene una forma diferente la braquistocrona que en la Tierra? ¿Es el tiempo de caída igual?

4) Escribir la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente al problema de Cálculo de Variaciones que se deriva de “La línea más corta uniendo dos puntos es la línea recta”.

5) Suponiendo que el problema tiene una solución  $C^2$ , hallar la función  $y = y(x)$  con  $y(-1) = y(1) = 0$  para la que  $\int_{-1}^1 (y')^2 + 4 \int_{-1}^1 y$  es mínimo. Utilizar el resultado para probar que bajo condiciones de regularidad adecuadas,

$$u(-1) = u(1) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (u')^2 + 4 \int_{-1}^1 u \geq -\frac{8}{3}.$$

6) Un animal se mueve en un terreno pantanoso que es más denso a mayor profundidad, de forma que la velocidad que desarrolla es proporcional a la altura sobre el fondo. Probar que para ir de un punto a otro en menor tiempo debe seguir un arco de circunferencia. (Supóngase que el problema tiene solución  $C^2$ ).

7) Hallar la integral y la ecuación diferencial correspondiente, cuando en el problema de la braquistocrona se considera  $x = x(y)$ .

8) La desigualdad de Wirtinger afirma que para cualquier  $f \in C^1([a, b])$  con  $f(a) = f(b) = 0$  se cumple  $\int_a^b f^2 \leq \pi^{-2}(b-a)^2 \int_a^b (f')^2$ . Demostrar que la constante  $\pi^{-2}(b-a)^2$  es óptima, no se puede reducir conservando la desigualdad.

9) Una partícula de masa 2 que se mueve por la recta real parte en  $t = 0$  con velocidad 1 y al cabo de un segundo tiene velocidad 0, deteniéndose. Sabiendo que su energía potencial en cada punto  $x$  es  $x(x-1)$ , y que el movimiento se realiza de modo que la integral de la energía total, cinética más potencial, es mínima; calcular la ecuación de movimiento.

10) Probar que si  $a < 0 < b$ ,  $A \neq B$  y  $n \geq 1$ , entonces  $\int_a^b x^n (y')^2 dx$  no alcanza un extremo entre las funciones  $y \in C^2$  con  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

11) En  $C^1([0, 1])$  se tiene la norma natural  $\|y\| = \sup |y(x)| + \sup |y'(x)|$ . Probar que  $I = \int_0^1 y^2(1 - (y')^2)$  con  $y \in C^1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ , alcanza un mínimo relativo en  $y \equiv 0$ , en el sentido de que en el entorno  $\{y \in C^1 : \|y\| < 1\}$ , el mínimo de  $I$  se alcanza en ella. Demostrar, sin embargo, que  $I$  no tiene mínimo (absoluto), ya que  $\inf_{y \in C^1} I = -\infty$ .

## SECCIÓN 1.1

### **Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros** (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- Historia del Cálculo de Variaciones (la contribución de cada autor y problemas de la Física-Matemática de los que surgió).
- Formulación de las ecuaciones básicas de la relatividad general a partir del Cálculo de Variaciones (sólo aconsejable si se tienen conocimientos sólidos de Geometría).

#### Generales:

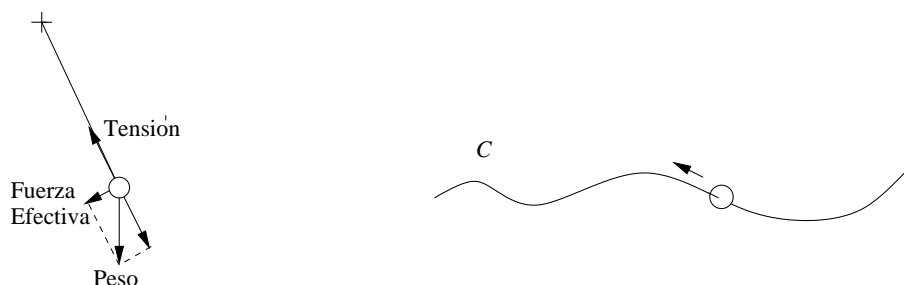
- Algoritmos de ordenación y búsqueda y sus aplicaciones.
- El átomo de hidrógeno.

#### **Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*La historia lo prueba; la física no solamente nos ha obligado a elegir entre los problemas que se presentaban en tropel; nos ha informado de problemas en los cuales, sin ella, nunca habríamos pensado. [Po] p. 99.*

## 1.2. Más sencillo

Uno de los primeros ejemplos del curso de Física para Matemáticos seguramente fue el péndulo simple [Al-Fi] §12.5. Se tenía una partícula de masa  $m$  que oscilaba unida a una varilla (supuesta inextensible, rígida de masa cero) y había que aplicar como siempre  $\vec{F} = m\vec{a}$ . En principio  $\vec{a} = \vec{r}''(t)$  con  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ , el vector de posición de la partícula, y  $\vec{F} = (0, -mg)$ , el peso. Pero esto no da resultado porque la partícula está ligada a moverse en  $x^2 + y^2 = \text{cte}$ . Los libros de Física introducen una fuerza de tensión que compensa la componente normal del peso, lo que indica que la partícula no se puede mover a lo largo de la varilla. Al final, hacen desaparecer  $x$  e  $y$  escribiendo todo en función del ángulo. A los principiantes las tensiones les suelen parecer en este y otros problemas unas fuerzas fantasmagóricas que nunca se ven y que sólo se introducen como un truco para eliminar las componentes normales.



La aparición de las tensiones se debe a que tratamos con dos coordenadas  $(x, y)$  un problema que es intrínsecamente unidimensional porque  $x^2 + y^2 = \text{cte}$ . En general, supongamos que tenemos en  $\mathbb{R}^3$  una partícula ligada a una curva  $C$ , es decir, una cuenta de collar ensartada en un alambre curvo. Aunque el vector de posición tenga tres coordenadas está claro que con un solo parámetro  $q$ , por ejemplo la longitud de arco, se describe la posición de la partícula  $\vec{r} = (x(q), y(q), z(q))$ . Si estudiamos cómo varía  $q$  en función del tiempo,  $q = q(t)$ , sabremos todo acerca del comportamiento mecánico. Digamos que la fuerza es conservativa, esto es  $\vec{F} = -\nabla V$  con  $V$  sólo dependiendo de la posición. Como antes, lo que tenemos que hacer es quedarnos sólo con la parte tangencial a  $C$  de la ecuación  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Al ser  $d\vec{r}/dq$  un vector tangente a  $C$ , se tiene:

$$\text{Proyec. de } m\vec{r}'' \text{ en la tang.} = \text{Proyec. de } \vec{F} \text{ en la tang.} \Leftrightarrow m\vec{r}'' \cdot \frac{d\vec{r}}{dq} = -\nabla V \cdot \frac{d\vec{r}}{dq}$$

(donde aquí y en lo sucesivo, prima o doble prima en  $\vec{r}$  indican derivadas con respecto del tiempo). Esto se puede escribir de una forma más retorcida pero equivalente, como

$$\frac{d}{dt} \left( m\vec{r}' \cdot \frac{d\vec{r}}{dq} \right) = m\vec{r}' \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dq} \right) - \frac{dV}{dq}.$$

Ya que  $V(q) = V(\vec{r}(q)) \Rightarrow dV/dq = \nabla V \cdot d\vec{r}/dq$ . (Véase [Sp] p. 236 y [Ch] p. 12 para comen-

tarios acerca del abuso de notación cometido). Considerando  $\vec{r}'(t) = (x'(q), y'(q), z'(q))q' = q' \frac{d\vec{r}}{dq}$  como función de dos variables,  $q$  y  $q'$ , se puede retorcer todavía más la ecuación anterior a

$$\frac{d}{dt} \left( m\vec{r}' \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial q'} \right) = m\vec{r}' \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial q} - \frac{dV}{dq}.$$

Definiendo el *lagrangiano*  $L = T - V$  donde  $T$  es la *energía cinética*  $\frac{1}{2}m\vec{r}' \cdot \vec{r}'$  en función de  $q$  y  $q'$ , la última ecuación se escribe como (recuérdese que  $V$  sólo depende de  $q$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q'} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Según habíamos visto en la sección anterior esto equivale a que la integral  $\int L dt$  alcance un valor estacionario (más adelante definiremos exactamente este término). Es como si la partícula para ir de un punto a otro pensara primero todas las posibles formas de ir, calculase las integrales del lagrangiano, y escogiese la que corresponde al valor estacionario (no es extraño que algunos precursores de este tipo de métodos les dieran un sentido filosófico o metafísico [La]). El Principio de Hamilton [Co-Hi] afirma que esto es una ley fundamental general que funciona con ligaduras más complicadas en el movimiento o con más partículas, considerando  $L$  como la diferencia de las energías cinética y potencial totales. Todo lo que se pide es que las coordenadas estén ligadas por ecuaciones que definan subvariedades que podamos parametrizar con algunos parámetros  $q_1, \dots, q_k$ . En este caso, en Mecánica se dice que las ligaduras son *holónomas* y que el sistema tiene  $k$  *grados de libertad* [Go].

**Principio de Hamilton:** *El movimiento de un sistema mecánico descrito por los parámetros  $q_1, q_2, \dots, q_k$  se lleva a cabo entre los instantes  $t_0$  y  $t_1$  de tal modo que la integral*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

*es estacionaria entre todas las posibles funciones  $q_i$  con  $q_i(t_0)$  y  $q_i(t_1)$  fijos.*

Nota: El significado exacto de *estacionario* es que al cambiar  $q_i$  por  $q_i + \epsilon_i \eta_i$ , donde  $\eta_i$  es una función regular que se anula en  $t_0$  y  $t_1$ , la función  $J(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k)$  sea estacionaria en el origen, esto es,  $\nabla J(\vec{0}) = \vec{0}$ . Para abreviar se suele escribir  $\delta J = 0$ .

### Diccionario:

- Movimiento de sistemas mecánicos  $\longrightarrow$  Funciones  $q_1, q_2, \dots, q_k$  tales que  $\delta J = 0$ .

Para que el Principio de Hamilton sea efectivo debemos encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange que le corresponden. El gran avance es que en ellas sólo aparecerán las funciones  $q_i$  que nosotros hayamos elegido al parametrizar el sistema.

**Teorema 1.2.** Sea  $L$  una función  $C^2$  de  $2k + 1$  variables. La integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1(t), \dots, q_k(t), q'_1(t), \dots, q'_k(t), t) dt$$

es estacionaria para ciertas funciones  $q_i \in C^2([t_0, t_1])$  con extremos prefijados, si y sólo si satisfacen las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

DEM.: Todo lo que hay que hacer es adaptar la prueba para el caso unidimensional utilizada en el problema de la braquistocrona. Así pues, para  $\eta_i$  funciones regulares que se anulen en los extremos, se define

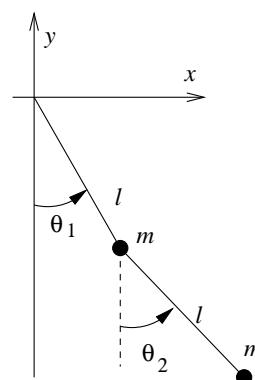
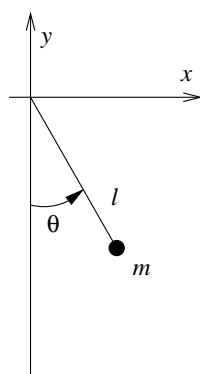
$$J(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1(t) + \epsilon_1 \eta_1(t), \dots, q'_k(t) + \epsilon_1 \eta'_k(t), t) dt.$$

Al imponer  $\nabla J(\vec{0}) = \vec{0}$ , se tiene

$$0 = \frac{\partial J}{\partial \epsilon_i} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial q'_i} \eta'_i \right) dt.$$

Integrando por partes el segundo sumando se transforma en  $-\eta_i \frac{d}{dt} (\partial L / \partial q'_i)$  y se siguen las ecuaciones del enunciado. ■

Por ejemplo, si en el péndulo simple elegimos como coordenada el ángulo  $\theta$  con la vertical entonces  $L = T - V = \frac{1}{2} m ((x')^2 + (y')^2) - mgy = \frac{1}{2} m l^2 (\theta')^2 + mgl \cos \theta$ , y las ecuaciones de Euler-Lagrange se reducen a la bien conocida del péndulo  $\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ .



Si unimos a este péndulo otro similar (péndulo doble), hay dos grados de libertad que

pueden representarse con los dos ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con las verticales. En este caso el lagrangiano se complica pero conceptualmente es mucho más sencillo que tratar de aplicar directamente  $\vec{F} = m\vec{a}$ :

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m((x'_1)^2 + (y'_1)^2) + \frac{1}{2}m((x'_2)^2 + (y'_2)^2) - mgy_1 - mgy_2 \\ &= ml^2((\theta'_1)^2 + \frac{1}{2}(\theta'_2)^2 + \theta'_1\theta'_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + mgl(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2). \end{aligned}$$

Hay diversas variantes del teorema anterior. Por ejemplo, si se permite que  $L$  pueda depender de las derivadas de  $q_i$  de hasta orden  $m$ , es fácil ver que las ecuaciones de Euler-Lagrange pasan a ser

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial q''_i} \right) + \dots + (-1)^{l+1} \frac{d^l}{dt^l} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(l)}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Si se buscan valores estacionarios de  $\int L$  condicionados a que  $\int M = \text{cte}$ , el método de los multiplicadores de Lagrange estudiado en Cálculo II o Cálculo III se puede incorporar a la demostración anterior. Con ello se prueba que el único cambio en las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes es que hay que reemplazar  $L$  por  $L - \lambda M$  (véase [La]). Otra variante que tiene un interés capital tanto teórico como práctico es el caso en que las funciones incógnitas dependen de varias variables. En este caso en las ecuaciones de Euler-Lagrange hay que contabilizar las derivadas con respecto a todas las derivadas parciales. Con ello se establece una equivalencia en algunos casos de interés entre ecuaciones en derivadas parciales y problemas de extremos. Por ejemplo, calcular la solución de  $\Delta u = f$  en  $\Omega$  con  $u = 0$  en la frontera es lo mismo que calcular el mínimo de  $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 + 2fu$ . El método de elementos finitos de Cálculo Numérico II aprovecha de esta relación buscando mínimos aproximados escribiendo  $u$  como combinación lineal de funciones sencillas [St-Bu] §7.7, por ejemplo lineales a trozos. Con el desarrollo de los ordenadores, éste método se ha mostrado fundamental en ingeniería.

Si una partícula está ligada a moverse en una superficie  $S$  sin verse sometida a ningún campo de fuerzas externas,  $V = 0$ , el lagrangiano es  $L = \frac{1}{2}m\|\gamma'(t)\|^2$  donde  $\gamma$ , con  $\text{Im } \gamma \subset S$ , es la curva que representa la trayectoria de la partícula. El Principio de Hamilton requiere que el valor de la “energía”  $\int \|\gamma'(t)\|^2 dt$  sea estacionario. A continuación veremos que minimizar la energía implica minimizar la longitud. Esta última propiedad caracteriza localmente a las geodésicas. Por ello no es sorprendente que estas viejas amigas nuestras de la Geometría II coincidan con las trayectorias de las partículas en  $S$ .

**Proposición 1.3.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y  $p, q \in S$ . Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$*



es una curva regular incluida en  $S$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  tal que  $\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt$  es mínima entre todas las curvas de este tipo, entonces  $\|\gamma'\|$  es constante y  $\gamma$  también tiene longitud mínima.

DEM.: Localmente la superficie vendrá dada por una parametrización  $\mathbf{X}(u_1, u_2)$  y la curva  $\gamma$  corresponde a cierta dependencia  $u_1 = u_1(t)$ ,  $u_2 = u_2(t)$ . Con lo cual  $\|\gamma'(t)\|^2 = \sum g_{ij} u'_i(t) u'_j(t)$ . Estos  $g_{ij} = g_{ij}(u_1, u_2)$  son los coeficientes de la primera forma fundamental [Do]. Llamando  $L$  a este sumatorio, un cálculo prueba que

$$(1.2) \quad u'_1 \frac{\partial L}{\partial u'_1} + u'_2 \frac{\partial L}{\partial u'_2} - L = L.$$

Si  $\gamma$  tiene la propiedad minimizante del enunciado, por las ecuaciones de Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt}(\partial L / \partial u'_i) = \partial L / \partial u_i$ . Al derivar con respecto de  $t$  el primer miembro de (1.2), considerando  $L = L(u_1(t), u_2(t), u'_1(t), u'_2(t))$ ; se obtiene:

$$u''_1 \frac{\partial L}{\partial u'_1} + u'_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u'_1} \right) + u''_2 \frac{\partial L}{\partial u'_2} + u'_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u'_2} \right) - \frac{d}{dt} L$$

que se anula al transformar el segundo y el cuarto sumandos con las ecuaciones de Euler-Lagrange y aplicar la regla de la cadena a  $dL/dt$ . De modo que (1.2) implica que  $\|\gamma'(t)\|^2$  es constante en el tiempo. Digamos  $\|\gamma'(t)\| = E$ .

La longitud de  $\gamma$  es  $\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = E$ . Si no fuera mínima existiría otra curva  $\lambda(t)$  conectando  $p$  y  $q$  con  $\int_0^1 \|\lambda'(t)\| dt = \tilde{E} < E$ . Quizá reparametrizando (tomando  $t$  proporcional a la longitud de arco), se puede suponer que  $\|\lambda'(t)\|$  es constante y por tanto que vale  $\tilde{E}$ . De aquí

$$\int_0^1 \|\lambda'(t)\|^2 dt = \tilde{E}^2 < E^2 = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt,$$

lo que contradice la propiedad minimizante de  $\gamma$ . ■

Un resultado como éste tiende un puente entre la Mecánica y la Geometría. Incluso bajo la presencia de un potencial los movimientos de una partícula se pueden identificar con geodésicas en ciertas subvariedades [Du-Fo-No] §33.3.

Epílogo: En el campo gravitatorio resulta que todas las partículas de prueba sufren la misma aceleración, independientemente de su masa, cuando son atraídas por una masa mucho mayor. Si la geodésica que sigue una partícula no depende de su masa, se puede entender la gravitación como algo puramente geométrico, una *curvatura* universal del espacio que hace que las geodésicas no sean rectas. Para ser coherente con la concepción

de Minkowski del espacio y el tiempo dentro de un mismo continuo, la curvatura también debe afectar al tiempo. Éstos son a grandes rasgos los puntos de partida de la relatividad general. Lo más complejo de esta teoría es la difícil ecuación que relaciona la curvatura con la masa. Dicho sea de paso, Einstein llegó a ella con mucho esfuerzo de forma no muy sistemática, tanteando diversas posibilidades; mientras que D. Hilbert (que publicó su resultado unos días antes que el propio Einstein) dedujo esta ecuación básica de la relatividad general con técnicas de Cálculo de Variaciones, como un teorema a partir del postulado físico de que esencialmente el espacio-tiempo trata de curvarse lo menos posible [Du-Fo-No] §39.

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Enunciar el Principio de Hamilton y explicar sus ventajas.  
b) Escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange.

2) Utilizando el Principio de Hamilton, estudiar el movimiento de una partícula que cae por un plano inclinado.

3) Hallar las ecuaciones de Euler-Lagrange y resolverlas, para el sistema formado por dos masas  $m_1$  y  $m_2$  que cuelgan, una a cada lado, de una polea de masa despreciable, por medio de una cuerda inextensible de longitud  $L$ .

4) De entre todas las gráficas de longitud  $\pi$  de funciones pares positivas conectando  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ , hallar la que limita área máxima con el eje  $X$ . (Se supone que hay una función  $f \in C^2((-1, 1))$  de la que proviene la gráfica).

5) Hallar el número de grados de libertad y el lagrangiano para el sistema formado por dos partículas que se mueven dentro del paraboloide  $z = x^2 + y^2 + 1$  sin que actúe ningún potencial.

6) Se dice que  $q_i$  es una variable *ignorable* si no aparece explícitamente en el lagrangiano. Este caso es muy interesante físicamente porque conduce a una cantidad que se conserva a lo largo del movimiento del sistema. Explicar cómo.

7) Empleando coordenadas polares, escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a una partícula que se mueve en el plano suponiendo la energía potencial gravitatoria  $-GMm/r$  debida una masa  $M$  fija en el origen.

8) Pruébese que en el problema anterior se cumple la segunda ley de Kepler: “El vector de posición de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales”.

9) En la relatividad especial el lagrangiano correspondiente a una partícula libre, con  $V = 0$ , es  $L = mc\sqrt{c^2(t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2}$  donde  $x, y, z, t$  (que ahora son  $q_1, q_2, q_3, q_4$ ) dependen de lo que se llama el *tiempo propio*  $\tau$ , que es el tiempo medido por un observador que viaja con la partícula. Probar que las partículas libres se mueven describiendo rectas. Explicar qué relación guarda  $L$  con la famosísima fórmula  $E = mc^2$  para partículas en reposo.

10) Sea  $\gamma \in C^2$  la curva en la esfera unidad  $S^2$  que conecta  $(0, 0, 1)$  y  $(1, 0, 0)$  minimizando la “energía”  $\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt$ . Hallar su ecuación.

11) Hallar el polinomio de grado 2 con  $P(0) = 0$ ,  $P(1) = 1$ , para el que  $\int_0^1 (P')^2 + \int_0^1 P^2$  es mínimo. Escribiendo  $u(x, y) = u_1(x)u_2(y)$ , hallar la solución de  $-\Delta u + 2u = 0$  en  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  satisfaciendo  $u(x, y) = u(y, x)$  en la frontera de  $Q$  y  $u(0, 0) = 0$ ,  $u(1, 1) = 1$ . Comprobar numéricamente que  $u(x, y) \approx P(x)P(y)$  y dar razones para ello.

## SECCIÓN 1.2

### Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- Principios variacionales en Mecánica y sus aplicaciones.
- Elementos finitos en ingeniería.
- El teorema de Noether en Mecánica y Teoría de Campos.
- Mecánica Celeste.

#### Generales:

- Aplicaciones de la Teoría de Grafos.
- Grupos cristalográficos planos (mosaicos de la Alhambra).

#### **Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*Supongamos un sistema formado por  $n$  puntos materiales, visibles o no; esto hará en total  $3n$  coordenadas; considerémoslas como las coordenadas de un punto único en un espacio de  $3n$  dimensiones. En virtud de las ligaduras de que acabamos de hablar, este punto único estaría sujeto a permanecer sobre una superficie de un número cualquiera de dimensiones  $< 3n$ ; para ir de un punto a otro, sobre esta superficie, se tomaría siempre el camino más corto; ese sería el principio único que resumiría toda la mecánica*

*Cualquier cosa que se piense de esta hipótesis, que nos seduzca por su simplicidad o nos choque por su carácter artificial, el solo hecho de que Hertz haya podido concebirla y considerarla como más cómoda que nuestras hipótesis habituales, basta para probar que nuestras ideas ordinarias y, en particular, las tres dimensiones del espacio, de ningún modo se imponen al mecánico con una fuerza invencible. [Po] p. 85, 86.*

### 1.3. Bailando al aire

Si tomamos un ortoedro homogéneo (algo con forma de ladrillo) tal que las tres aristas que confluyen en cada vértice tengan longitudes bien distintas podemos observar un curioso fenómeno. Al lanzarlo al aire imprimiéndole un giro de eje vertical, el ortoedro se “dejará girar” cuando el eje sea paralelo a la arista mayor o a la menor, pero no cuando lo sea a la intermedia sin presentar grandes cabeceos. Incluso con la caja de una cinta de vídeo se puede observar el fenómeno (aunque no es la mejor forma de hacerlo). Para hallar las ecuaciones que rigen el cabeceo de un sólido rígido que gira es necesario enunciar una de las leyes fundamentales en Mecánica: la ley de conservación del momento angular, la cual, paradójicamente, indica a grandes rasgos la tendencia que tienen los sistemas a mantener un eje de rotación fijo.

Para una partícula de masa  $m$  describiendo una trayectoria  $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$  con velocidad  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , el *momento angular* se define en cada instante  $t$  como

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}.$$

Si la partícula gira en movimiento circular alrededor de un eje que pasa por el origen, se llama *velocidad angular*  $\vec{\omega}$  al vector en la dirección de este eje (con sentido compatible con el de giro) y cuyo módulo es la variación del ángulo en función del tiempo,  $d\theta/dt$ . Su relación con la velocidad de la partícula es

$$(1.3) \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{es decir } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}).$$



Al sustituir se tiene  $\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  y después de desarrollar el doble producto vectorial con  $\vec{r} = (x, y, z)$  se puede escribir

$$\vec{L} = m\mathcal{M}\vec{\omega} \quad \text{donde} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Evidentemente en un movimiento circular de una partícula como el descrito,  $\vec{L}$  no se conserva a no ser que el origen esté en el plano de rotación, lo cual está relacionado físicamente con el hecho de que al hacer girar una pelota unida a una cuerda como una honda, podemos hacer que la cuerda genere un círculo, pero no un cono.

En un sólido rígido que rota, el momento angular se define como la “suma” de los

momentos angulares que lo componen, es decir

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{con} \quad I = \int \rho \mathcal{M} dx dy dz$$

donde  $\rho = dm/d\text{Vol}$  es la densidad, y la integral de  $\mathcal{M}$  se realiza componente a componente. Es posible probar que la matriz  $I$  es definida positiva. La ley de conservación del momento angular es una sencilla consecuencia del equilibrio de fuerzas en un sistema de partículas que pueden interactuar dos a dos en la dirección de la recta que las une (véase [Al-Fi] §9.4, [Ru] p. 18). Implica que para un sólido rígido en ausencia de fuerzas externas  $\vec{L}$  no varía. Es decir

$$(1.4) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad (\text{conservación del momento angular}).$$

Sobre la superficie terrestre no es fácil deshacerse de la fuerza externa  $\vec{F}$  dada por la gravedad que se aplica en el centro de masas situado en  $\vec{r}_0$  y (1.4) debe modificarse reemplazando el segundo miembro por  $\vec{r}_0 \times \vec{F}$  [Al-Fi] §9.4, con lo que el eje de giro varía en general (lo que plantea cierto problema al definir  $\vec{\omega}$  como variación del ángulo [Go] §1.2, §4.8). Esto queda ilustrado a grandes rasgos en el movimiento de una peonza [Al-Fi] §10.6. Cuando su eje se ha inclinado un poco por las fuerzas de rozamiento, deja de estar fijo adquiriendo un movimiento rotatorio alrededor de la vertical, llamado *precesión*, debido al término  $\vec{r}_0 \times \vec{F}$ .

Si lanzamos verticalmente un sólido rígido que rota libremente entonces  $\vec{r}_0$  y  $\vec{F}$  son paralelos con lo que (1.4) es válida. Fijando un sistema de referencia unido rígidamente al sólido, digamos situado en el centro de gravedad, se tiene que  $I$  es una matriz constante, llamada *tensor de inercia*, (lo de “tensor” indica cómo cambia al transformar el sistema de referencia). Para el ejemplo de un ortoedro homogéneo de masa  $M$  y dimensiones  $a \times b \times c$ ,  $a > b > c$ , y unos ejes de coordenadas en la dirección de las aristas, situados en el centro del ortoedro, el tensor de inercia es una matriz diagonal, por la simetría. Su primer elemento es  $I_1 = \frac{M}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) dx dy dz = (b^2 + c^2)M/12$ , y permutando las variables, se tiene que los otros dos no nulos son  $I_2 = (a^2 + c^2)M/12$ ,  $I_3 = (a^2 + b^2)M/12$ .

Nuestro objetivo es utilizar las ecuaciones que describen  $\vec{\omega}$  en un sistema de referencia pegado al sólido para estudiar cómo cabecea al girar. La existencia del cabeceo, que parece contradecir la conservación del momento angular, es fácil de intuir dinámicamente pensando en una regla rectangular clavada por su centro oblicuamente a una varilla que gira.



La fuerza centrífuga crea un par que trata de poner la regla horizontal dando lugar a oscilaciones armónicas simples.

Para escribir el modelo matemático, nótese que una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ , que suponemos positivamente orientada, debe cumplir, según (1.3),  $d\vec{u}_i/dt = \vec{\omega} \times \vec{u}_i$  si está pegada al sólido (considérese la velocidad de una partícula en la punta de  $\vec{u}_i$  o entiéndase esto como la definición de la velocidad angular). Lo que vamos a hacer es cambiar de base la ecuación (1.4) con un poco de ingenio para que el resultado sea manejable. Aunque la elección de un sistema adecuado de coordenadas sugiere un acercamiento lagrangiano (que es posible, [Ge]), aquí seguiremos un camino más directo.

#### Diccionario:

- Sistema de referencia ligado al sólido  $\longrightarrow$  Base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  orientada positivamente con  $d\vec{u}_i/dt = \vec{\omega} \times \vec{u}_i$ .
- Eje de giro  $\longrightarrow$  Dirección del vector  $\vec{\omega}$ .
- Momento angular  $\longrightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}$  con  $I$  definida positiva y constante en  $\mathcal{B}$ .
- Conservación del momento angular  $\longrightarrow d\vec{L}/dt = \vec{0}$  en la base canónica.

Un conocido teorema de Álgebra Lineal asegura que una matriz definida positiva se diagonaliza con un cambio ortogonal. En consecuencia es posible orientar los ejes definidos por los vectores de  $\mathcal{B}$  conservando sus propiedades y de manera que  $I$  sea diagonal y por tanto  $L_i = I_i\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , para ciertos  $I_i > 0$ , donde  $L_i$  y  $\omega_i$  son las coordenadas de  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$  en la base  $\mathcal{B}$ . Quizá reordenando los vectores de la base y cambiándolos de sentido se puede suponer  $I_1 \leq I_2 \leq I_3$  sin perder la orientación positiva.

**Proposición 1.4.** *Sea  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  una base ortonormal positivamente orientada con  $\vec{u}_i = \vec{u}_i(t)$  y tal que  $d\vec{u}_i/dt = \vec{\omega} \times \vec{u}_i$  para cierto vector (variable)  $\vec{\omega} = \omega_1\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 + \omega_3\vec{u}_3$ . Sea  $\vec{L} = I_1\omega_1\vec{u}_1 + I_2\omega_2\vec{u}_2 + I_3\omega_3\vec{u}_3$  con  $I_1, I_2, I_3$  constantes positivas. Entonces  $d\vec{L}/dt = \vec{0}$  si y sólo si*

$$(1.5) \quad \begin{cases} I_1\omega_1' = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\omega_2' = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3\omega_3' = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

DEM.: Por la definición de  $\vec{L}$  y la regla del producto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d}{dt}(I_i\omega_i\vec{u}_i) = \sum (I_i\omega_i'\vec{u}_i + I_i\omega_i(\vec{\omega} \times \vec{u}_i)).$$

Sustituyendo  $\vec{\omega} = \omega_1\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 + \omega_3\vec{u}_3$ . y empleando  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ ,  $\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \vec{u}_1$ , etc. por

ser base ortonormal positivamente orientada, la ecuación  $i$ -ésima de (1.5) se deduce de la anulación del coeficiente de  $\vec{u}_i$ . ■

Incluso sin resolver explícitamente (1.5) es posible conocer el aspecto de las trayectorias. Lo cual desde el punto de vista físico es natural por la conservación de la energía.

**Proposición 1.5.** *Cualquier trayectoria de una solución no nula  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  de (1.5) pertenece a la intersección de los elipsoides*

$$I_1^2 x^2 + I_2^2 y^2 + I_3^2 z^2 = C, \quad I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = K,$$

para ciertas constantes  $C, K > 0$ .

DEM.: La derivada de  $I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2$  es  $2I_1^2 \omega_1 \omega_1' + 2I_2^2 \omega_2 \omega_2' + 2I_3^2 \omega_3 \omega_3'$ . Sustituyendo  $I_i \omega_i'$  empleando (1.5), se llega a

$$2I_1(I_2 - I_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + 2I_2(I_3 - I_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + 2I_3(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\omega_3 = 0.$$

La derivada de  $I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2$  da el mismo resultado sin los coeficientes  $I_i$  frente a los paréntesis, por lo que también se anula. ■

Supongamos que  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son distintos. La intersección de estos elipsoides es típicamente una curva (llamada *polhode* [Al-Fi] p.310) pero si  $C = I_i K$  se reduce a un punto (y su simétrico) en el  $i$ -ésimo eje de coordenadas. Esto corresponde a las soluciones obvias  $\vec{\omega} = (\text{cte}, 0, 0), (0, \text{cte}, 0), (0, 0, \text{cte})$ . Es decir, que justamente al girar por los ejes de  $\mathcal{B}$ , llamados *ejes principales*, ni el observador exterior que usa la base canónica ni el que está subido al sólido que usa  $\mathcal{B}$ , notarán ninguna variación del momento angular. Estas soluciones corresponden a puntos críticos del sistema autónomo (1.5). Uno de ellos es inestable y pequeñas perturbaciones iniciales provocarán a la larga grandes variaciones. Según la proposición anterior, todo lo que tenemos que hacer para entender las trayectorias es hacer la intersección de dos elipsoides, y la estabilidad está incluida en el siguiente lema geométrico. Es un buen reto de percepción espacial tratar de visualizarlo. Recuérdese que el diámetro de un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  es la máxima distancia entre cada par de sus elementos. Por convenio tomamos  $\text{diam} \emptyset = 0$ .

**Lema 1.6.** *Sea  $\mathcal{E}_C$  y  $\mathcal{E}_K$  los elipsoides de la proposición anterior con  $0 < I_1 < I_2 < I_3$  y  $K > 0$  fijados, y consideremos su intersección positiva  $\mathcal{A}_{C,K} = \mathcal{E}_C \cap \mathcal{E}_K \cap \{x, y, z \geq 0\}$ . Entonces  $\lim_{C \rightarrow I_i K} \text{diam} \mathcal{A}_{C,K} = 0 \Leftrightarrow i = 1, 3$ .*

DEM.: Si  $i = 1$ , multiplicando la ecuación de  $\mathcal{E}_K$  por  $I_1$  y restando la de  $\mathcal{E}_C$ , se tiene  $I_2(I_2 - I_1)y^2 + I_3(I_3 - I_1)z^2 = C - I_1 K$ . Como  $I_2 - I_1, I_3 - I_1 > 0$ , al tomar límites se sigue  $y = z = 0$  (es una elipse cada vez menor) y  $\mathcal{A}_{C,K}$  “tiende” a ser el punto  $(\sqrt{K/I_1}, 0, 0)$ . El caso  $i = 3$  es análogo. Si  $i = 2$ , sea  $C = I_2 K + \epsilon$  con  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño y sean  $P = \mathcal{A}_{C,K} \cap \{x = 0\}$  y  $Q = \mathcal{A}_{C,K} \cap \{y = 0\}$ . Es fácil ver que  $P$  y  $Q$  son no vacíos y se reducen a un punto. Además  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P = (0, \sqrt{K/I_2}, 0)$ , de modo que  $\text{diam} \mathcal{A}_{C,K} \geq d(P, Q) \geq \sqrt{K/I_2}$ . ■



## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Enunciar y explicar la ley de conservación del momento angular. b) Definir el tensor de inercia.

2) Explicar matemáticamente por qué para cada  $\vec{r}$  fijado existe una matriz  $\mathcal{M}$  tal que  $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \mathcal{M}\vec{\omega}$  para todo  $\vec{\omega}$ . Partiendo de esta definición de  $\mathcal{M}$ , demostrar que es semidefinida positiva (esto es,  $\vec{\omega}^t \mathcal{M} \vec{\omega} \geq 0, \forall \vec{\omega}$ ) y que su núcleo es  $\{\vec{\omega} : \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{0}\}$ . Concluir que el tensor de inercia es definido positivo.

3) Si movemos la cabeza con un giro cuya matriz es  $A$ , los vectores  $\vec{L}$ ,  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  pasan a ser  $A\vec{L}$ ,  $A\vec{r}$  y  $A\vec{v}$ . Explicar por qué esto sugiere que para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  se cumple  $A\vec{x} \times A\vec{y} = A(\vec{x} \times \vec{y})$ . Estudiar cómo hay que modificar esta relación para que sea válida para toda matriz ortogonal  $A$ .

4) Sean  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 3$  y  $K = 1$ . Hallar las proyecciones en los planos  $YZ$ ,  $XZ$  y  $XY$  de la trayectorias cuando  $C$  vale  $1 + \epsilon$ ,  $2 \pm \epsilon$  y  $3 - \epsilon$ , respectivamente. Explicar el resultado del problema anterior en términos de la estabilidad.

5) Calcular  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  para una esfera y para una barra cilíndrica.

6) Para que una palanca de primera especie (un balancín) con dos masas en los extremos esté en equilibrio, el producto de cada masa por su brazo (distancia al punto de apoyo) debe dar lo mismo. Deducir esta ley estática de la conservación de la conservación del momento angular. (Probar primero que para una partícula  $d\vec{L}/dt = \vec{r} \times \vec{F}$  con  $\vec{F}$  la fuerza).

7) En Física se suele llamar *energía cinética de rotación* de un cuerpo que gira, a  $E_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t I \vec{\omega}$ . Probar que ésta no es más que la “suma” de las energías cinéticas de las partículas que componen el cuerpo, teniendo en cuenta que  $\vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

8) Escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema formado por dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por una cuerda inextensible que pasa por una polea homogénea de radio  $R = 0'5$  y masa  $M = 2$ . Téngase en cuenta en el lagrangiano las energías cinéticas de las partículas y la de rotación de la polea.

9) Si un tronco de masa  $m$  cae por una rampa (un plano inclinado) rodando sin delizarse y sin rozamiento, razonar si llega antes abajo cuando es fino o cuando es grueso.

10) Estudiar si el sentido de la precesión de una peonza que gira rápidamente coincide con el sentido de giro, con el opuesto, o no hay relación entre ambos.

11) Supongamos que  $\omega$  es el módulo de la velocidad angular de una peonza por su eje, y  $\Omega$  es el de la velocidad angular de precesión. Probar que si  $\omega$  es mucho mayor que  $\Omega$ , entonces  $\Omega\omega$  es aproximadamente constante para cada peonza.

## SECCIÓN 1.3

**Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos** (el precio de esta fotocopia)De la sección:

- Estudio detallado del movimiento giroscópico.
- El concepto matemático de estabilidad en problemas de Física y otras ciencias.
- Sistemas dinámicos.

Generales:

- Algoritmos de primalidad y factorización y sus aplicaciones en criptografía.
- Funcionamiento de las centralitas telefónicas y distribución de las llamadas en los teléfonos móviles.

**Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*Es imposible representarse el espacio absoluto; cuando quiero representarme simultáneamente objetos y a mí mismo en movimiento en el espacio absoluto, en realidad me represento a mí mismo, inmóvil, mirando moverse a mi alrededor diversos objetos y un hombre que es exterior a mí pero que convengo en llamar yo.*

*¿Estará resuelta la dificultad cuando se consienta en referir todo a estos ejes ligados a nuestro cuerpo? ¿Sabemos esta vez qué es un punto, definido así por su posición relativa con respecto a nosotros? Mucha gente responderá que sí y dirá que “localiza” los objetos exteriores. [Po] p. 58.*

## 1.4. De película

Gracias a ciertas propiedades químicas [Al-Ta], [Is], cuando un alambre que determina una curva cerrada se sumerge en una solución jabonosa y después se extrae de ella, se forma una película muy delgada que tiene como frontera a dicha curva. Todos sabemos cómo continúa la historia: después de meter un aro, soplamos y tenemos una pompa de jabón. Su forma esférica se explica por la presión que ejerce el aire encerrado en su interior, como en un globo homogéneo. Si no soplamos, y simplemente introducimos curvas de formas caprichosas, nos sorprenderemos de las curiosas superficies obtenidas [Is], y parafraseando a [Hi-Tr] p. 91, pasaremos de un divertimento para niños a un *divertimento para niños y matemáticos* (véanse las fotos en [Hi-Tr] p. 93 y la primera hoja de [Mo]). Pero antes de desempolvar nuestro libro de Geometría II, debemos adentrarnos unas líneas en el modelo físico.

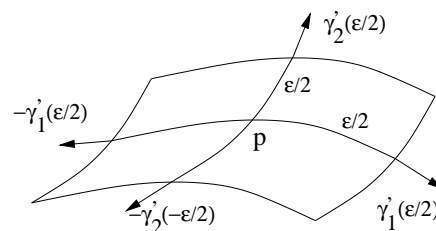
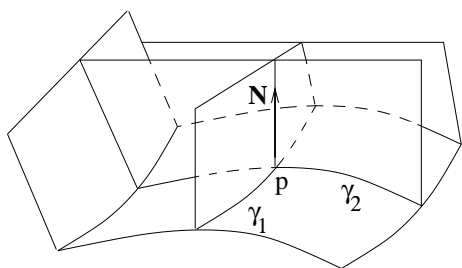
Si en la superficie de una membrana delgada y tensa damos un pequeño corte, los dos bordes se separan (el rasgón cuando no se usa la lejía adecuada es la prueba). Lo cual indica que hay una fuerza tangencial a la superficie y perpendicular a los bordes, la *tensión*, que sujeta ambos bordes cuando están unidos. Se llama *tensión superficial* a la magnitud  $\tau$  de tal fuerza por unidad de longitud (parece claro que cuanto más largo sea el roto más fuerza se habrá desatado al hacerlo). Quizá en una membrana elástica real  $\tau$  esté lejos de ser constante (aunque así se supone en los modelos clásicos [Fe-Le-Sa] 12-7), pero en una película jabonosa esto es cierto con gran aproximación.

Si consideramos un pequeño “parche cuadrado” de película de jabón centrado en un punto  $p$  y de lado  $\epsilon$ , las tensiones actuando en cada lado medirán todas lo mismo,  $\epsilon\tau$ . Para que este parche esté en equilibrio los vectores tangenciales que definen, deben cancelarse. Para ello no pueden apuntar todos hacia abajo o hacia arriba (concavidad o convexidad), sino que en  $p$  debe haber un punto de silla.



Para concretar más lo que entendemos por un parche cuadrado de lado  $\epsilon$  centrado en  $p$ , consideremos dos secciones normales por planos perpendiculares entre sí a través de  $p$ . Los cortes dan lugar localmente a dos curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , que suponemos parametrizadas por longitud de arco y con  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ . Considerando los planos perpendiculares a estas

curvas en  $\gamma_1(\pm\epsilon/2)$  y  $\gamma_2(\pm\epsilon/2)$ , se obtiene algo así como un cuadrado curvilíneo, el parche del que hablábamos.



Las tensiones tienen, con aproximación hasta orden uno en  $\epsilon$ , la dirección de los vectores tangentes  $\pm\gamma'_1(\pm\epsilon/2)$ ,  $\pm\gamma'_2(\pm\epsilon/2)$ . Según lo dicho, que la película de jabón esté en equilibrio requiere que se cancelen hasta orden uno cuando  $\epsilon$  es suficientemente pequeño, es decir, que

$$\vec{0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma'_1(\epsilon/2) - \gamma'_1(-\epsilon/2) + \gamma'_2(\epsilon/2) - \gamma'_2(-\epsilon/2)}{\epsilon} = \gamma''_1(0) + \gamma''_2(0) = (\kappa_1 + \kappa_2)\mathbf{n}.$$

Donde se ha usado  $\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$  (fórmula de Frenet [Do]). Así pues la suma de las curvaturas de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en el punto  $p$  debe ser nula.

Con esto llegamos a un modelo intrínsecamente geométrico.

### Diccionario:

- Película jabonosa  $\rightarrow$  Superficie tal que en cada punto la suma de las curvaturas de curvas perpendiculares obtenidas por secciones normales es nula.

Físicamente, la tensión superficial en los fluidos está asociada al hecho de que cuesta trabajo estar en la superficie [Va 1], de manera que hay una energía potencial asociada al área, y las leyes de la Estática sugieren que el equilibrio se alcanza en los valores críticos del potencial, en este caso del área. Antes de probarlo matemáticamente, como una concesión a los más olvidadizos, recordaremos algunos de los temas de Geometría II [Do].

Dado un punto  $p$  de una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , siempre existe una parametrización local  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  con  $p \in \text{Im } \mathbf{X} = S \cap \mathcal{V}$ . Los vectores tangentes a  $S$  en  $\mathbf{X}(u, v)$  están generados por  $\mathbf{X}_u(u, v)$  y  $\mathbf{X}_v(u, v)$  (las parciales  $\partial/\partial u$ ,  $\partial/\partial v$ ). El área de una porción

de superficie  $\mathbf{X}(K)$  con  $K \subset \mathbb{R}^2$  (digamos compacto para poder integrar bien) es la integral

$$A = \int \int_{\mathbf{X}(K)} dS = \int \int_K \|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\| dudv.$$

Desde Gauss se suele denotar  $E = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u$ ,  $F = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v$ ,  $G = \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v$  (los coeficientes de la primera forma fundamental). De  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ , se sigue

$$A = \int \int_K \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Si en  $p \in S$  cortamos con secciones normales (planos que contienen al vector normal) una de las curvas obtenidas tendrá curvatura  $k_1$  máxima, y otra curvatura  $k_2$  mínima. Se define la *curvatura media*  $H$  como su semisuma,  $H = (k_1 + k_2)/2$ . Se prueba que estas curvas “máxima” y “mínima” son perpendiculares en  $p$ , y que si tomamos una sección normal que forme un ángulo  $\theta$  con la curva “máxima”, la curva así obtenida tiene en  $p$  curvatura  $k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$  (fórmula de Euler).

La diferencial de la aplicación de Gauss que asigna a cada  $p \in S$  la normal unitaria  $\mathbf{N}$  se puede considerar como una función  $DN : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ , que tendrá cierta matriz  $(a_{ij})$  en la base  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$  del espacio tangente. Es decir

$$(1.6) \quad \begin{cases} \mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{X}_u + a_{12}\mathbf{X}_v \\ \mathbf{N}_v = a_{21}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v \end{cases}$$

Se prueba que las curvaturas  $k_1$  y  $k_2$  son los autovalores cambiados de signo de  $(a_{ij})$ .

Comencemos viendo que es indiferente suponer que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son las curvas “máxima” y “mínima”.

**Proposición 1.7.** *La semisuma de las curvaturas en  $p \in S$  de las curvas determinadas por dos secciones normales ortogonales entre sí coincide con la curvatura media.*

DEM.: Si una de las secciones normales forma un ángulo  $\theta$  con la “curva máxima”, la otra forma un ángulo  $\theta + \pi/2$ . La fórmula de Euler asegura que la semisuma de las curvaturas es

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{(k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta) + (k_1 \cos^2(\theta + \pi/2) + k_2 \sin^2(\theta + \pi/2))}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Donde se ha usado  $\cos^2(\theta + \pi/2) = \sin^2 \theta$  y  $\sin^2(\theta + \pi/2) = \cos^2 \theta$ . ■

Introduciendo esto en el modelo se tiene que *las películas jabonosas corresponden a superficies de curvatura media nula en todo punto*. En Geometría, usando un nombre clásico poco correcto, se llaman *superficies mínimas* a las que tienen esta propiedad. Actualmente se conocen decenas de familias de ellas.

A continuación vamos a transformar la condición de curvatura media nula en algo más analítico que podamos comprobar “a mano” si nos dan la parametrización.

**Lema 1.8.** *La curvatura media se anula si y sólo si*

$$GN_u \cdot \mathbf{X}_u + EN_v \cdot \mathbf{X}_v = F(\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_u).$$

DEM.: Multiplicando escalarmente la primera ecuación de (1.6) por  $G\mathbf{X}_u$  y  $F\mathbf{X}_v$  y restando los resultados, se obtiene

$$GN_u \cdot \mathbf{X}_u - FN_u \cdot \mathbf{X}_v = a_{11}(EG - F^2).$$

De la misma forma, si en la segunda se multiplica por  $E\mathbf{X}_v$  y  $F\mathbf{X}_u$ , y se resta, se llega a

$$EN_v \cdot \mathbf{X}_v - FN_v \cdot \mathbf{X}_u = a_{22}(EG - F^2).$$

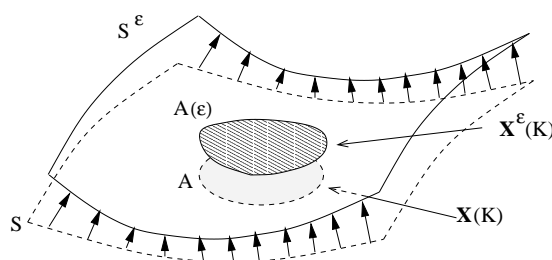
Por Cauchy-Schwarz  $EG > F^2$ , con igualdad estricta porque  $\mathbf{X}_u$  y  $\mathbf{X}_v$  son linealmente independientes. Por tanto la suma de los primeros miembros de las dos ecuaciones anteriores es nula si y sólo si  $a_{11} + a_{22} = 0$ , lo que equivale a  $H = 0$ , ya que la traza es la suma de los autovalores. ■

Ahora veremos que las superficies mínimas tienen área quizá no mínima, pero sí crítica (estacionaria) entre todas las perturbaciones pequeñas de la superficie. Primero vamos a definir lo que entendemos por una perturbación.

Dada una parametrización local de  $S$ ,  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , consideremos

$$\mathbf{X}^\epsilon = \mathbf{X} + \epsilon h \mathbf{N}$$

donde  $\mathbf{N}(u, v)$  es la normal en  $\mathbf{X}(u, v)$  y  $h = h(u, v)$  es una función regular arbitraria.



Cuando  $\epsilon$  es pequeño esto define, quizá en un abierto  $\mathcal{V}$  un poco menor que  $\mathcal{U}$ , una parametrización de una superficie  $S^\epsilon$  obtenida a partir de  $S$  moviendo cada punto un poco a lo largo de la normal. Diremos que  $\mathbf{X}^\epsilon$  define una *variación normal*. Si  $K \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , designaremos por  $A(\epsilon)$  al área de la porción de superficie  $\mathbf{X}^\epsilon(K)$ . Es decir, en algún sentido

$A(\epsilon)$  es el área en la que se transforma  $A = |\mathbf{X}(K)|$  cuando perturbamos una cantidad comparable a  $\epsilon$  la porción de superficie elegida.

**Teorema 1.9.** *La función  $A(\epsilon)$  alcanza un valor crítico en  $\epsilon = 0$  (para toda  $h$ ) si y sólo si la curvatura media se anula.*

DEM.: Sea una variación normal  $\mathbf{X}^\epsilon$  como antes, parametrizando una superficie  $S^\epsilon$ . Los coeficientes de la primera forma fundamental de  $S^\epsilon$  son

$$E^\epsilon = \mathbf{X}_u^\epsilon \cdot \mathbf{X}_u^\epsilon = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u + 2\epsilon h \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_u + \epsilon^2 \mathcal{H}_1 = E + 2\epsilon h \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_u + \epsilon^2 \mathcal{H}_1$$

$$G^\epsilon = \mathbf{X}_v^\epsilon \cdot \mathbf{X}_v^\epsilon = G + 2\epsilon h \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_v + \epsilon^2 \mathcal{H}_2$$

$$F^\epsilon = \mathbf{X}_u^\epsilon \cdot \mathbf{X}_v^\epsilon = F + \epsilon h (\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_u) + \epsilon^2 \mathcal{H}_3$$

Para ciertas funciones  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_3$ .

Operando se llega a

$$E^\epsilon G^\epsilon - (F^\epsilon)^2 = EG - F^2 + 2\epsilon h \mathcal{H} + \epsilon^2 \mathcal{H}_4,$$

para cierta función  $\mathcal{H}_4$  que no depende de  $\epsilon$  y

$$\mathcal{H} = G\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_u + E\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_v - F(\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_u).$$

Por tanto

$$A(\epsilon) = \int \int_K \sqrt{E^\epsilon G^\epsilon - (F^\epsilon)^2} \, dudv \Rightarrow A'(0) = \int \int_K \frac{h\mathcal{H}}{\sqrt{EG - F^2}} \, dudv.$$

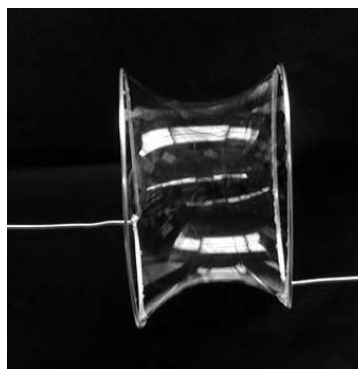
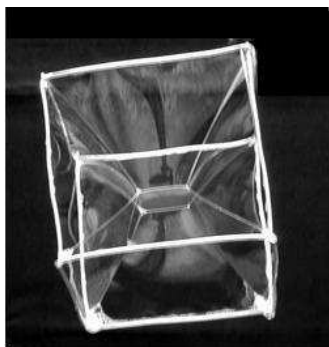
Así pues  $A'(0) = 0$  cuando  $\mathcal{H} = 0$ , y según el lema anterior esto ocurre si y sólo si la curvatura media es nula. Por otra parte, si éste no fuera el caso, tomando  $h = \mathcal{H}$  se tendría  $A'(0) \neq 0$ . ■

Epílogo: No siempre las superficies mínimas son mínimas en realidad, en el sentido de que ninguna otra superficie con la misma frontera tenga menor área, sin embargo es posible probar este resultado para cualquier porción de superficie mínima que se pueda escribir como el grafo de una función definida sobre un convexo [Mo]. Es decir, que en cierto sentido las superficies mínimas son al menos mínimas localmente.

Aquí hemos considerado sólo superficies diferenciables de  $\mathbb{R}^3$  pero uno podría preguntarse si existen contornos “raros” para los que la película de jabón no da lugar a una superficie diferenciable. Éste problema está íntimamente relacionado con el estudio de la regularidad de la solución de ecuaciones en derivadas parciales no lineales (esto es, muy difíciles). Algunos dibujos [Du-Fo-No] p. 401, son suficientes para sospechar que no podemos esperar siquiera la unicidad en el caso general. El problema de lo “buena” que debe

ser la solución de las ecuaciones en derivadas parciales que derivan de buenos problemas del Cálculo de Variaciones fue uno de los famosos problemas que propuso Hilbert en 1900.

Las experiencias con soluciones jabonosas nos muestran que al introducir el armazón de un cubo (el esqueleto determinado por las aristas) la superficie obtenida no es diferenciable sino que tiene algunas aristas.



También se puede comprobar que las superficies que minimizan el área no varían continuamente cuando modificamos el contorno. Por ejemplo, empleando como contorno dos aros idénticos enfrentados (determinando un cilindro recto), según varía la distancia entre ellos la superficie minimizante pueden ser los círculos interiores o un catenoide que los une [Is] p. 79, p. 163.



## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Explicar qué es la tensión superficial. b) Describir brevemente el modelo de las películas de jabón.

2) Al aplicar un movimiento del espacio a una superficie mínima se obtiene una superficie mínima. Explicar esto geoméricamente y en términos de películas jabonosas.

3) Explicar en términos de la tensión superficial, por qué es natural que sea indiferente sumar las curvaturas principales o las de otras dos secciones normales cualesquiera ortogonales.

4) Comprobar que el helicoido parametrizado por  $\mathbf{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$  es una superficie mínima.

5) Estudiar para qué valores de  $a$ , una película de jabón podría tener la forma de una porción de la superficie  $x^2 + y^2 = a \cosh^2 z$ .

6) Si la superficie descrita por una película de jabón viene dada por  $z = f(x, y)$ , hallar una ecuación en derivadas parciales que deba satisfacer  $f$ .

7) Empleando la parametrización  $\mathbf{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, h(v))$  de una superficie de revolución, hallar la ecuación diferencial que debe satisfacer  $h$  para que  $\mathbf{X}$  defina una superficie mínima.

8) Estudiar qué superficies de revolución pueden ser descritas por películas de jabón, resolviendo la ecuación del problema anterior.

9) Probar que  $\mathbf{X}(u, v) = (u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2)$  parametriza localmente una superficie mínima.

10) Utilizando el Cálculo de Variaciones, hallar la superficie de revolución  $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  con borde las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = \pm a$ , para que el área sea estacionaria. (Aplíquese la fórmula  $A = 2\pi \int f \sqrt{1 + (f')^2}$  de Cálculo I). Probar que si  $a > 1/2$  no hay solución con  $f \in C^2$ .

11) Aproximar con dos cifras decimales el valor de  $R$  a partir del cual una película de jabón con forma de catenoide  $x^2 + y^2 = \lambda^2 \cosh^2(z/\lambda)$  conectando  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = \pm 1$ , tiene área menor que la suma de las áreas de los círculos limitados por estas circunferencias.

SECCIÓN 1.4

## Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos (el precio de esta fotocopia)

De la sección:

- Estudio matemático de los fenómenos relacionados con la tensión superficial.

Generales:

- Los eclipses.

### Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

*Todas las leyes son, pues, obtenidas de la experiencia, pero para enunciarlas es necesaria una lengua especial; el lenguaje ordinario es demasiado pobre y, por otra parte, demasiado vago para expresar relaciones tan delicadas, tan ricas y tan precisas.*

*He ahí, pues, una primera razón por la cual el físico no puede pasarse sin las matemáticas: le suministran la única lengua que él puede hablar. [Po] p. 95.*

## Jugar al gua

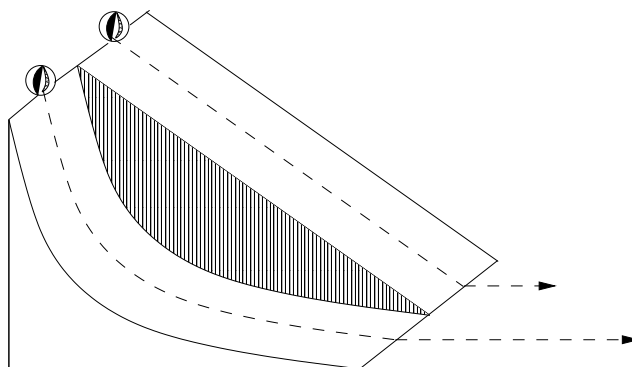
### Material:

- Cartón o cartulina.
- Dos canicas iguales.
- Una calculadora.

Realizaremos con el cartón o cartulina dos toboganes conectando los puntos  $(0, h)$  y  $(l, 0)$  de un plano vertical. El primero será simplemente una rampa recta y el segundo tendrá el perfil de una curva cicloide que responde a la parametrización

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = h + a(\cos t - 1).$$

El valor de  $a$  se calcula de manera que la curva pase por  $(l, 0)$  con lo cual se debe resolver el sistema  $a(t - \operatorname{sen} t) = l$ ,  $a(1 - \cos t) = h$ . Dividiendo ambas ecuaciones y operando se llega a una ecuación para  $t$  que se puede resolver aproximadamente con la calculadora usando el método de Newton estudiado en Cálculo Numérico I (esto es,  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ), después basta tomar  $a = h/(1 - \cos t)$ . Los datos correspondientes a un experimento real\* son  $h = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 16 \text{ cm}$ , de donde se dedujo de esta forma  $a \approx 5'002$ .



Una vez contruidos ambos toboganes los pondremos uno al lado del otro y dejaremos caer las canicas simultáneamente desde ambos. Con ello comprobaremos experimentalmente

---

\* *N. del A.* Utilicé una cartulina un poco blanda por lo cual encajoné los toboganes usando un juego de construcción. Para obtener el perfil con forma de cicloide simplemente di valores a  $t$  y pinté los puntos correspondientes en la cartulina. Si uno utiliza un ordenador con este propósito hay que asegurarse de que no modifica las escalas de  $x$  e  $y$ . Es conveniente que la pendiente a salvar por los toboganes sea mayor del 60% (concretamente  $h/l \geq 2/\pi$ , para que la cicloide no se combe hacia arriba). Las condiciones ideales del experimento serían ausencia de rozamiento y que las canicas más que rodar se deslizaran, pero esto último, casi imposible de conseguir, no parece demasiado crítico.

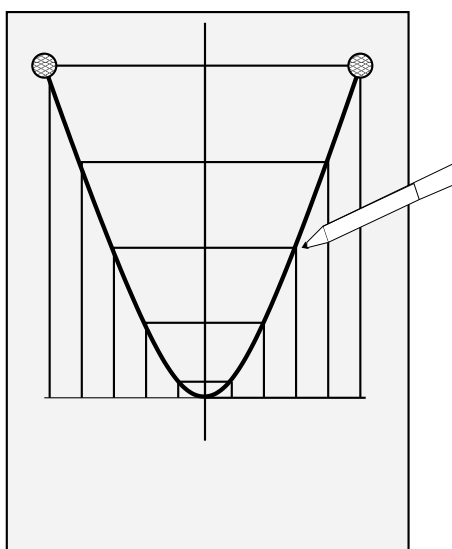
que el tobogán de la cicloide es más rápido por ser la braquistocrona. Si uno tiene paciencia y ganas, puede reemplazar el tobogán recto por cualquier otro. Dentro de unos límites razonables, la braquistocrona siempre vencerá con claridad.

## Otro eslabón

### Material:

- Una cadena homogénea con eslabones pequeños (por ejemplo de joyería).
- Una hoja de papel milimetrado.
- Un cartón.
- Dos chinchetas.
- Un rotulador de punta fina.
- Una calculadora.

Elijamos dos puntos destacados (digamos de coordenadas enteras) en una misma horizontal del papel milimetrado y clavemos allí con las chinchetas los eslabones de los extremos de la cadena poniendo debajo el cartón. Señalemos la mediatriz (perpendicular en el punto medio) del segmento que une las chinchetas. Cuando pongamos el cartón en vertical y dejemos a la cadena colgar libremente, por la simetría, el punto más bajo pertenecerá a dicha mediatriz. Señalémoslo con el rotulador y marquemos también los puntos de la cadena que pertenecen a las paralelas a la mediatriz a distancias 1, 2, 3, etc. Todo esto se puede hacer cómodamente en horizontal abatiendo el cartón con cuidado para que no se deforme la curva descrita por la cadena.



Después de desclavar la cadena, consideremos unos ejes cartesianos cuyo origen es el punto más bajo y calculemos, mirando las divisiones del papel milimetrado, las coordenadas del

resto de los puntos señalados, los cuales serán de la forma  $(x_n, y_n)$  con  $x_n = n \in \mathbb{Z}$ . Aquí citaremos los siguientes datos obtenidos de un experimento real\*

$$\begin{array}{ccccc} y_0 = 0 & y_2 = 0'65 & y_4 = 2'9 & y_6 = 7'55 & y_8 = 15'75 \\ y_1 = 0'2 & y_3 = 1'6 & y_5 = 4'95 & y_7 = 11'1 & y_9 = 23'5 \end{array}$$

Sea  $(r_0, s_0)$  el punto donde está una de las chinchetas, en el caso antes citado  $(r_0, s_0) = (\pm 9, 23'5)$ , y hallemos la solución aproximada,  $a$ , de la ecuación

$$s_0 = a \left( \cosh \frac{r_0}{a} - 1 \right).$$

Esto puede hacerse aplicando el método de Newton a  $f(x) = s_0/a - \cosh(r_0/a) + 1$ . Para  $r_0 = 9$ ,  $s_0 = 23'5$  se obtiene  $a = 3'20241 \dots$ . Calculemos finalmente para cada  $y_n$  el valor de  $a \operatorname{arc} \cosh(1 + y_n/a)$ . En nuestro caso

$$\begin{array}{ccc} y_1 = 0'2 \mapsto 1'126 & y_4 = 2'9 \mapsto 4'037 & y_7 = 11'1 \mapsto 6'971 \\ y_2 = 0'65 \mapsto 2'007 & y_5 = 4'95 \mapsto 5'081 & y_8 = 15'75 \mapsto 7'891 \\ y_3 = 1'6 \mapsto 3'081 & y_6 = 7'55 \mapsto 6'025 & y_9 = 23'5 \mapsto 9 \end{array}$$

y, obviamente,  $y_0 \mapsto 0$ . A la vista de estos datos, se cumple con gran aproximación  $x_n = a \operatorname{arc} \cosh(1 + y_n/a)$ , o lo que es lo mismo, hemos comprobado experimentalmente que la ecuación de una cadena que cuelga de sus extremos es (salvo traslaciones) de la forma

$$y = a \left( \cosh \frac{x}{a} - 1 \right)$$

A la curva representada por esta ecuación (o a su trasladada) se le llama catenaria.

Explicación: Cada particulita o eslaboncito de la cadena, al estar en equilibrio, sólo cuenta con energía potencial,  $E = mgh$  donde  $m$  es la masa,  $g$  es la aceleración de la gravedad (9'8 en el Sistema Internacional) y  $h$  la altura (de *height* no de "altura"). Al "sumar" la energía de todas las porciones infinitesimales de la cadena, la energía total

---

\* *N. del A.* Utilicé una cadena como las que se usan para llevar medallas. Los eslabones eran de 2 mm y la longitud total de unos 53 cm. Clavé las chinchetas con una separación de 18 cm, con lo cual señalé 9 puntos a cada lado. La práctica muestra que es muy importante forzar la simetría con respecto a la mediatriz, lo que asegurará la perfecta horizontalidad. Para mayor precisión reemplacé  $y_n$  por  $(y_n + y_{-n})/2$ .

vendrá dada por

$$E = \int gh \, dm = \rho g \int h \, ds$$

donde  $\rho$  es la densidad lineal  $\rho = dm/ds$  (masa por unidad de longitud) que por la homogeneidad es constante, de modo que el incremento de masa  $dm$  es proporcional al incremento de longitud  $ds$ . Para cada valor de  $x$  se tiene  $h = y(x)$  y es fácil convencerse geoméricamente de que  $ds/dx = \sqrt{1 + (y')^2}$  (por Pitágoras  $(ds/dx)^2 = (dx/dx)^2 + (dy/dx)^2$ ), con lo cual

$$E = \rho g \int y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx.$$

Es natural suponer que esta energía debe ser lo menor posible por la tendencia de las partículas a caer (menor altura  $\Rightarrow$  menor energía potencial). En contra de esta tendencia, las chinchetas sujetan la cadena en puntos simétricos  $(-c, H)$  y  $(c, H)$ ; y por mucho que quiera caer cada punto la cadena es inextensible y consecuentemente su longitud  $L$  invariante. Esto conduce a que la ecuación de la catenaria es una función  $y : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$  que resuelve el problema matemático

$$\int_{-c}^c y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad \text{es mínimo, con} \quad \int_{-c}^c \sqrt{1 + (y')^2} \, dx = L, \quad y(-c) = y(c) = H.$$

Para ello hay que resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange con multiplicadores. Esto es

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{donde} \quad F = y \sqrt{1 + (y')^2} - \lambda \sqrt{1 + (y')^2},$$

lo que conduce a  $(y - \lambda)y'' = 1 + (y')^2$ . Ahora solo hay que aplicar la tecnología del curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

$$\frac{y'}{1 + (y')^2} y'' = \frac{y'}{y - \lambda} \Rightarrow (\text{integrando}) A^2(1 + (y')^2) = (y - \lambda)^2 \Rightarrow \frac{y'/A}{\sqrt{((y - \lambda)/A)^2 - 1}} = \frac{1}{A}.$$

Una última integración [**Gr-Ry**] 2.261, 1.622.6, conduce a  $\text{arc cosh}((y - \lambda)/A) = x/A + B$ , con  $A$  y  $B$  constantes, esto es

$$y = \lambda + A \cosh \left( \frac{x}{A} + B \right).$$

La condición  $y(-c) = y(c)$  implica  $B = 0$ . Situando el origen de coordenadas de manera que  $y(0) = 0$  se tiene una ecuación como la comprobada experimentalmente. La constante  $A$  se relaciona con la longitud por medio de  $L = \int \sqrt{1 + (y')^2}$ .

Tampoco en este problema de Cálculo de Variaciones acertó Galileo, pues pensó que la catenaria era una parábola [**Gr**]. Hubo que esperar hasta casi 50 años después de su muerte para que Huygens, Leibniz y Johann Bernoulli encontraran la ecuación correcta.



## A velocidad

### Material:

- Una silla giratoria.
- Dos libros gruesos iguales.

Una vez sentados en la silla, cojamos los libros con los brazos extendidos y hagámosla girar impulsándonos con los pies. Una vez que hayamos alcanzado una velocidad de rotación suficiente para que demos alguna vuelta con las piernas estiradas sin necesidad de impulso; recogiendo los pies y llevando los brazos con los libros al pecho notaremos mágicamente un sensible aumento de la velocidad. Este aumento será mayor cuanto más pesados sean los libros\*.



Este experimento es una pobre imitación de otro que se puede realizar en muchos Museos de la Ciencia. En vez de girar la silla se hace girar una rueda de bicicleta (mejor una un poco más pesada y menor para que sea más manejable) por un eje que sostenemos en las manos paralelo al suelo y perpendicular a nuestro cuerpo. Al poner de golpe el eje vertical, la silla en contra de toda intuición comenzará a girar con nosotros encima.

Explicación: Para simplificar consideremos sólo la masa  $M$  de cada libro representándolos como masas puntuales. Si la distancia de cada libro al eje de giro (nuestro cuerpo) es  $R$ , el módulo del momento angular total correspondiente es

$$\|\vec{L}\| = MRv + MRv = 2MRv,$$

---

\* *N. del A.* Utilicé una silla de oficina y los dos tomos de la 21ª edición del diccionario de la R.A.E. con tapas duras. Aunque no son muy pesados (a no ser que uno los lea de una tacada) el cambio de velocidad es apreciable. Probé con libros mayores y aparentemente daban mejor resultado pero era más difícil sostenerlos simétricamente.

con  $v$  el módulo de la velocidad. Si el momento angular debe permanecer constante (al menos en intervalos de tiempo pequeños, para que no le dé tiempo a actuar al rozamiento), entonces al encoger los brazos reduciendo  $R$ , la velocidad  $v$  aumentará. Las piernas también entran en el balance del momento angular y al encogerlas al tiempo que los brazos se aumenta más la velocidad. Este fenómeno lo aprovechan los patinadores artísticos para efectuar giros muy rápidos.

## 2. Ondas

### 2.1. Y dale calor

En la historia de las Matemáticas, y seguramente en la Universal, no hay escasez de leyendas arriesgadas, apoteosis agradecidas y nombres impropios. Aunque las *series de Fourier* no constituyen un ejemplo paradigmático, cabe señalar que en realidad ya habían sido empleadas anteriormente por Euler, y Fourier no resolvió satisfactoriamente, desde el punto de vista actual, las cuestiones más básicas de convergencia. Incluso para sus contemporáneos, había serias faltas de rigor en los razonamientos de Fourier y así se hizo constar cuando su memoria fue galardonada. Por otro lado, también sería injusto olvidar que la “*Teoría Analítica del Calor*” de Fourier [Fo], publicada en 1822, marcó un hito constituyendo el primer tratado sistemático de lo que hoy llamamos Análisis Armónico o Análisis de Fourier. Como el título indica, Fourier se ocupó de estudiar la transmisión del calor. Aunque menciona varias veces la gran aplicabilidad de su teoría, lo cierto es que prácticamente no incluye ningún dato numérico experimental (lo cual es lógico dada la dificultad de medir con precisión pequeñas variaciones de la temperatura) y el grueso de su trabajo se dedica a resolver el problema matemático al que conduce su modelo. Esto ya es un gran avance científico porque marca un camino sistemático para la termodinámica, hasta entonces inexistente. En sus palabras: “Las nuevas teorías explicadas en nuestra obra están unidas para siempre a las ciencias matemáticas y reposan, como ellas, sobre fundamentos invariables; conservarán todos los elementos que hoy poseen y adquirirán continuamente más alcance”. Más adelante ([Fo] I §20), arrobado de entusiasmo, escribirá: “El análisis matemático tiene, pues, relaciones necesarias con los fenómenos físicos sensibles; su objeto no ha sido creado por la inteligencia humana, es un elemento preexistente del orden universal y no tiene nada de contingente ni fortuito; está impreso en la naturaleza”.

Antes de ver los problemas matemáticos que le preocupaban a Fourier y por qué los incluimos en un capítulo que trata acerca de ondas, debemos plantear el sencillo modelo que conduce a la ecuación del calor. Seguiremos al pie de la letra [Ch] §5.3.

El calor no es más que una forma de energía, por eso en la caja de cereales del desayuno aparece el contenido energético tanto en kilojulios (KJ) como en kilocalorías (Kcal), comúnmente llamadas calorías, por error, en Dietética. La temperatura absoluta (en grados Kelvin), que denotaremos por  $u$ , es la energía media, de modo que el calor total en una porción sólida homogénea  $V$  de cierta sustancia, es

$$Q = K \int_V u$$

donde  $K$  es una constante positiva que depende del tipo de sustancia considerada. Cuando

un cuerpo caliente se pone en contacto con otro frío la energía (el calor) fluye del primero al segundo. Por ejemplo, en una dimensión si tenemos un punto  $x$  a temperatura  $u(x)$  y otro “al lado”,  $x + \Delta x$ , a temperatura  $u(x + \Delta x)$ , parece lógico (incluso para Simplicio [Ga] p. 29) suponer que el calor fluirá del primero al segundo en una magnitud proporcional a  $u(x) - u(x + \Delta x) \approx -\Delta x \partial u / \partial x$ . La ley de enfriamiento de Newton no es otra cosa que esta suposición llevada a tres dimensiones. Concretamente afirma que el vector flujo de energía es proporcional a  $-\nabla u$  (recuérdese que la dirección opuesta al gradiente es siempre la de máximo decrecimiento) y por tanto el flujo del calor a través de la frontera de  $V$ , que denominaremos  $\partial V$ , es, para cierta constante  $K' > 0$ , igual a la integral de superficie

$$\mathcal{F} = -K' \int_{\partial V} \nabla u.$$

Si el calor se escapa de los puntos calientes a los fríos, la temperatura cambia con el tiempo, como nos demuestra cualquier taza de café, digamos  $u = u(x, y, z, t)$ . Parece obvio que las pérdidas de calor de la porción de sustancia  $V$  que hemos seleccionado, se hacen a través de la frontera, es decir, que la variación del calor en  $V$  por unidad de tiempo se cancela con el flujo a través de la frontera. Escrito con fórmulas

$$K \frac{d}{dt} \int_V u - K' \int_{\partial V} \nabla u = 0.$$

Nótese que lo único que estamos diciendo es que para sacar algo (en nuestro caso calor) de un cuerpo hay que hacerlo a través de su frontera. Para que la fórmula quede bonita, siempre podemos medir el espacio o el tiempo en un sistema de unidades tomado de la Ciencia Ficción o de nuestra imaginación, de manera que el cambio de escala provoque la igualdad  $K/K' = 1$ .

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\partial V} \nabla u = 0.$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int_V \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right) = 0 \quad \text{con} \quad \Delta u = \text{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Si esta igualdad se cumple para cualquier porción  $V$  de la sustancia elegida, no queda más remedio que el integrando se anule (la función nula es la única que integrada en cualquier parte da cero). Llegamos entonces finalmente a la *ecuación del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

Diccionario:

- El calor fluye hacia los sitios más fríos  $\longrightarrow$  flujo =  $-\text{cte} \int_{\partial V} \nabla u$ .
- El calor se escapa por la frontera  $\longrightarrow$   $\frac{d}{dt} \int_V u = \text{cte} \cdot \text{flujo}$ .
- Estas propiedades se cumplen en cada entorno  $\longrightarrow$   $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ .

A pesar de que la propia situación física y nuestros razonamientos son en principio tridimensionales, podemos repetirlos en dimensiones uno y dos considerando varillas o superficies totalmente aisladas del medio exterior y empleando el teorema de la divergencia en la dimensión adecuada (en dimensión uno es el teorema fundamental del cálculo y en dimensión dos una variante del teorema de Green). Ya en el caso unidimensional se ve la importancia de la topología de la varilla que consideremos y servirá para ilustrar lo importante que se muestra analizar en *ondas*.

Si tenemos una varilla infinita (una recta), físicamente parece claro que la evolución de su temperatura depende sólo de la temperatura inicial ( $t = 0$ ) en cada punto  $u(x, 0) = f(x)$ . Si la varilla en lugar de ser infinita está curvada formando un aro, digamos de longitud uno, podemos identificar  $x$  con la longitud de arco y así  $u(x, t)$  y  $f(x)$  deben ser funciones periódicas en  $x$  de periodo uno. Matemáticamente en este caso nos enfrentamos al problema de hallar una solución de

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad \text{con} \quad u(x, 0) = f(x), \quad \text{donde} \quad f(x) = f(x + 1).$$

Fourier se dio cuenta de que había infinitas soluciones sencillas de periodo uno en  $x$  de la ecuación del calor, dadas por

$$e^{-4\pi^2 n^2 t} \text{sen}(2\pi n x), \quad e^{-4\pi^2 n^2 t} \text{cos}(2\pi n x) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En  $t = 0$  dan lugar a senos y cosenos de frecuencias enteras. Si tuviéramos la suerte de que  $f$  fuera una combinación lineal (incluso “infinita”) de senos y cosenos de este tipo habríamos resuelto (2.1) sin más que introducir el factor  $e^{-4\pi^2 n^2 t}$  correspondiente para  $t > 0$ . La gran sorpresa es que no hace falta tener suerte, siempre podemos expresar cualquier función  $f$  decente y periódica en términos de senos y cosenos como antes. Físicamente se tiene el importantísimo adagio:

*Toda onda periódica se expresa como una superposición de tonos puros*

Para simplificar el tratamiento matemático recurrimos a un artificio técnico consistente en que debido a las relaciones  $\text{sen } t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ ,  $\text{cos } t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ , basta expresar toda función en términos de las funciones complejas

$$e(n x) = e^{2\pi i n x} = \text{cos}(2\pi n x) + i \text{sen}(2\pi n x) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

No deben darnos miedo los números complejos, son sólo para escribir dos funciones en una.

El teorema fundamental es el que establece el ahora llamado *desarrollo de Fourier*.

**Teorema 2.1.** Sea  $f \in C^2$  una función de periodo uno, entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nx) \quad \text{con} \quad a_n = \int_0^1 f(y) e(-ny) dy,$$

donde la suma se entiende como límite de  $\sum_{|n| \leq N}$  y la convergencia es absoluta y uniforme.

Una consecuencia inmediata que se sigue simplemente sustituyendo es:

**Corolario 2.2.** La siguiente función es solución de (2.1):

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-4\pi^2 n^2 t} e(nx) \quad \text{con} \quad a_n = \int_0^1 f(y) e(-ny) dy.$$

DEM. (del Teorema): Sea el núcleo de Dirichlet  $D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e(nx)$ . Un cálculo prueba que

$$\sum_{|n| \leq N} a_n e(nx) = \int_0^1 D_N(x-y) f(y) dy = \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t) f(x-t) dt,$$

donde la última igualdad se sigue del cambio de variable  $t = x - y$ , y notando que el intervalo de integración (aquí elegido como  $[-1/2, 1/2]$ ) es arbitrario con tal de que se extienda a todo un periodo. Por otra parte, en cada periodo  $\int D_N = 1$  y por tanto

$$f(x) - \sum_{|n| \leq N} a_n e(nx) = \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t) (f(x) - f(x-t)) dt.$$

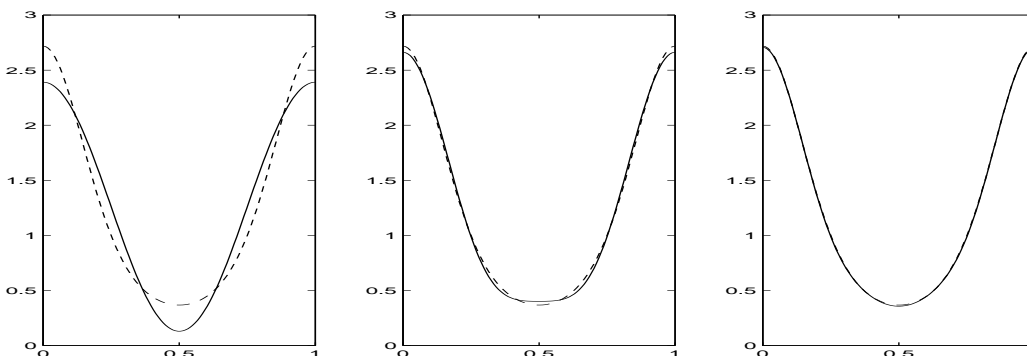
Utilizando la fórmula para sumar una progresión geométrica, después de simplificar adecuadamente, se obtiene  $D_N(t) = \text{sen}((2N+1)\pi t) / \text{sen}(\pi t)$ . La función  $h_x(t) = (f(x) - f(x-t)) / \text{sen}(\pi t)$  es  $C^1$  en  $t$ , así que integrando por partes

$$f(x) - \sum_{|n| \leq N} a_n e(nx) = -\frac{1}{(2N+1)\pi} \int_{-1/2}^{1/2} h'_x(t) \cos((2N+1)\pi t) dt.$$

Lo que prueba la convergencia uniforme a la función  $f$ . La convergencia absoluta se sigue simplemente integrando dos veces por partes en la fórmula de  $a_n$  ya que  $\sum n^{-2} < \infty$ . ■

La regularidad de  $f$  se puede rebajar sin perder la convergencia uniforme [Dy-Mc]. Buena parte de los esfuerzos en Análisis Armónico se han dedicado a entender en diferentes

contextos en qué sentido se pueden representar funciones con *tonos puros* bajo condiciones de mínima regularidad [We]. En general la regularidad se refleja en la rapidez de convergencia. Cuando la función es  $C^\infty$ , la aproximación es increíblemente buena. Por ejemplo, los siguientes gráficos muestran  $f(x) = e^{\cos(2\pi x)}$  (en línea discontinua) aproximada por  $\sum_{|n|\leq N} a_n e(nx)$  para  $N = 1, 2$  y  $3$ .



Una vez que sabemos expresar las funciones periódicas de periodo uno mediante su desarrollo de Fourier, podemos hacer lo propio con una función de periodo  $L$  simplemente con un cambio de variable  $x \mapsto x/L$ . Así se tiene que  $f$  es superposición de ondas del tipo  $\sin(2\pi nx/L)$  y  $\cos(2\pi nx/L)$ , o con la notación empleada anteriormente,

$$(2.2) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nx/L) \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) e(-ny/L) dy.$$

Con ello podemos construir la solución de la ecuación para un aro de cualquier longitud.

Nótese que para un aro de longitud  $L$  debemos analizar en ondas de frecuencias múltiplos enteros de  $1/L$ . Si pensamos que un aro de longitud  $L \rightarrow \infty$  se aproxima a una varilla infinita (y análogamente que una función no periódica es de “periodo infinito”), para analizar las temperaturas en ella necesitaríamos todas las frecuencias. Para ser más precisos, (2.2) se puede escribir como

$$f(x) = h \sum_{\xi_n} g(\xi_n) e(\xi_n x) \quad \text{con} \quad g(t) = \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e(-yt) dy$$

donde  $\xi_n = nh$  y  $h = 1/L$ . Esto es como una suma de Riemann de una integral, y cuando  $L \rightarrow \infty$ , bajo condiciones adecuadas de regularidad se debe tener la llamada *fórmula de inversión*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e(\xi x) d\xi \quad \text{con} \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e(-y\xi) dy.$$

A la función  $\widehat{f}$  se le llama *transformada de Fourier* de  $f$ . La fórmula de inversión expresa  $f$  como una superposición continua (integral) de los “tonos puros”  $e(\xi x) = \cos(2\pi\xi x) + i \sin(2\pi\xi x)$ . Estas fórmulas vuelven a ser ciertas para funciones integrables con dos derivadas integrables (en realidad mucha menos regularidad es suficiente [Dy-Mc]).

Por tanto, en el caso de una varilla infinita podemos partir como antes de las soluciones “obvias”  $e^{-4\pi^2\xi^2 t} \sin(2\pi\xi x)$  y  $e^{-4\pi^2\xi^2 t} \cos(2\pi\xi x)$ , sintetizadas en  $e^{-4\pi^2\xi^2 t} e(\xi x)$ , para probar que la solución de la ecuación del calor para una varilla infinita con dato inicial  $u(x, 0) = f(x)$  es para  $t > 0$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2\xi^2 t} \widehat{f}(\xi) e(\xi x) d\xi.$$

Si se sustituye la definición de  $\widehat{f}$  y se emplea  $\int e^{-4\pi^2\xi^2 t} e(r\xi) d\xi = e^{-r^2/(4t)} / \sqrt{4\pi t}$  (véase [Gr-Ry] 17.23.13), se llega a una representación más sencilla

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} f(y) dy \quad \text{para } t > 0.$$

No hay ningún problema en extender a más dimensiones los desarrollos y transformadas de Fourier usando una función  $e(\cdot)$  por cada variable. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$  se define

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2, y_3) e(-y_1\xi_1) e(-y_2\xi_2) e(-y_3\xi_3) dy_1 dy_2 dy_3.$$

Y se tiene una fórmula como la de  $\mathbb{R}$  para la solución de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^3$ .

Epílogo: Cuando se estudian otros problemas o la misma ecuación del calor en dominios más complicados, las “soluciones naturales” (obtenidas por separación de variables) pueden no ser senos y cosenos sino funciones más complejas (funciones de Bessel, armónicos esféricos, etc.). Sin embargo vuelve a ocurrir el milagro, de nuevo todo se desarrolla en términos de ellas. Esto tiene que ver lejanamente con el conocido resultado de Álgebra Lineal que afirma que toda matriz simétrica diagonaliza en una base ortonormal, lo cual se puede reformular diciendo que los autovectores de un endomorfismo autoadjunto en un espacio vectorial de dimensión finita producen una base ortogonal. Hay *teoremas espectrales* (cf. [Co-Hi] III §5) que extienden esto a dimensión infinita. Así por ejemplo  $\sin(2\pi nx)$  y  $\cos(2\pi nx)$  son autovectores (autofunciones) del operador lineal derivada segunda en el espacio vectorial de las funciones de periodo uno.



## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Deducir la ecuación del calor. b) Explicar qué es el desarrollo de Fourier

2) Sea una varilla infinita (la recta real) en la que la temperatura inicial es positiva en un entorno del origen y nula fuera de él. Demostrar que en cualquier instante posterior al inicial, la temperatura es positiva en todo punto. ¿Por qué se dice que la velocidad del calor es infinita?

3) Explicar por qué al estudiar la temperatura en un sólido cuya frontera está térmicamente aislada se impone en ella  $\nabla u \cdot \vec{n} = 0$ , con  $\vec{n}$  la normal.

4) Probar que según el modelo de esta sección, el promedio de la temperatura de un aro permanece constante a lo largo del tiempo. ¿Qué ocurre en la práctica?

5) Para  $f$  de periodo uno, hallar su momento de orden dos, esto es  $\int_0^1 |f|^2$ , en términos de los coeficientes de Fourier. Utilizar este hecho para probar que en un aro el momento de orden dos de la temperatura siempre decrece. (Supóngase la convergencia).

6) Probar que  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \bar{f} g$  define un producto escalar en la funciones continuas (reales o complejas) de periodo uno. Probar que  $e(n\pi x)$  son ortonormales y deducir que  $\sum a_n e(n\pi x) = \sum b_n e(n\pi x)$  con convergencia uniforme a una función continua  $\Rightarrow a_n = b_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . (Unicidad del desarrollo de Fourier).

7) Un modelo plausible [Dy-Mc] para la temperatura en el interior de la Tierra a profundidad  $x$  (pequeña) es que  $u(x, t)$  sea periódica en  $t$  de periodo uno (un año) por efecto de las estaciones, y se tenga  $u(x, t) = \sum c_n(x) e(2\pi n t)$  con  $c_n(x)$  acotada para  $x > 0$ . Deducir  $c_n(x) = a_n e^{-x(1 \pm i)\sqrt{\pi|n|}}$  de la ecuación del calor, donde  $a_n$  son los coeficientes de Fourier de la temperatura en la superficie  $f(t) = u(0, t)$  y el signo  $\pm$  es el de  $n$ .

8) Hallar explícitamente  $u(x, t)$  cuando en el problema anterior se toma  $f(t) = \text{sen}(2\pi t) + \text{cte}$  (de este modo pleno invierno y pleno verano corresponden a  $t = 1/4$  y  $t = 3/4$ , respectivamente). Deducir que las estaciones no actúan con la misma intensidad ni al mismo tiempo en la superficie que en el interior.

9) Comprobar que  $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty (e^{-(x-v)^2/(4t)} - e^{-(x+v)^2/(4t)}) f(v) dv$ , con  $f$  suficientemente regular, resuelve la ecuación del calor para  $x \in [0, +\infty)$  bajo las condiciones  $u(0, t) = 0$  y  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x > 0$ .

10) Comprobar que  $u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\pi^2 n^2 t} \text{sen}(\pi n x)$  satisface formalmente la ecuación del calor para la "varilla"  $x \in [0, 1]$  con extremos "fríos"  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ . Calculando  $\int_0^1 u(x, t) \text{sen}(\pi n x) dx$ , hallar  $a_n$  en función de la temperatura inicial  $f(x) = u(x, 0)$ . Si es posible, con la ayuda de un ordenador trazar gráficas de  $u$  para diferentes tiempos cuando  $f(x) = 1/2 - |x - 1/2|$ .

11) Si  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier de  $f$  y  $g$  (de periodo uno), hallar los coeficientes de Fourier de  $h(x) = \int_0^1 f(x-t)g(t) dt$ .

## SECCIÓN 2.1

### Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- Termodinámica.
- Ecuaciones de la combustión.

#### Generales:

- Análisis Funcional y Teoría de Distribuciones en Mecánica Cuántica.
- Redes neuronales.

#### **Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*La serie de Fourier es un precioso instrumento del cual el análisis hace un uso continuo; por ese medio es cómo ha podido representar funciones discontinuas. Si Fourier lo ha inventado fue para resolver un problema de física, relativo a la propagación del calor. Si este problema no se hubiera planteado naturalmente, nunca se habría osado resistir al continuo sus derechos; durante mucho tiempo, todavía, se habría considerado a las funciones continuas como las únicas verdaderas. [Po] p. 101.*

## 2.2. Todo en blanco y negro

No es necesario comprarse un escáner ni una cámara digital, basta darse un garbeo por la red para toparse con montones de fotos cuya extensión es .jpg que corresponden al formato JPEG (según parece, sería más propio decir JFIF). La razón de su insistente presencia es que permite conservar una calidad fotográfica bastante aceptable con ficheros de tamaño relativamente pequeño y por tanto susceptibles de ser transmitidos con rapidez. Lo que hay en estos ficheros es una versión filtrada y comprimida de los coeficientes de Fourier discretos de diferentes trocitos de la fotografía. Así que puede que las Matemáticas no sirvan para nada, pero podemos recibir por *e-mail* una foto con beso de nuestra pareja ausente, almacenar en nuestro disco duro una imagen del nuevo sobrinito recién tomada con una cámara digital, o retocar la cara de nuestro profesor sin efectos secundarios, gracias a que alguien entendió las técnicas estudiadas en la asignatura Ecuaciones Diferenciales y Análisis Funcional o en Variable Real.

En primer lugar definiremos qué es una fotografía, o para ser más modernos, una foto digitalizada. Usualmente es un rectángulo formado por *pixels* (cuadrados), cada uno de ellos dotados de un color. Matemáticamente se puede considerar como un función

$$F : R \longrightarrow C \quad \text{con} \quad R = ([a, b] \times [c, d]) \cap \mathbb{Z}^2,$$

asignando al *pixel*  $(i, j)$  del rectángulo  $R$  el color  $F(i, j)$ . Los colores se especifican por tres *bytes* (la cantidad de rojo, verde y azul que contienen), de modo que hay  $2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 = 16\,777\,216$  colores diferentes. En el formato JPEG hay un tratamiento previo del color (se hace un cambio de coordenadas a las llamadas coordenadas de luminancia y crominancia) porque la fisiología de nuestro ojo causa que seamos capaces de distinguir mejor unos colores que otros. Para librarnos de este detalle técnico digamos que nuestra fotografía es en blanco y negro. De todos los colores anteriores sólo 256 corresponden a tonos de gris. Numerándolos del  $-128$  (negro) al  $127$  (blanco) se tiene  $C = \{-128, -127, \dots, 0, \dots, 127\}$ .

Como puede haber partes de la foto más difíciles de analizar que otras, se subdivide el rectángulo  $R$  en cuadrados  $Q_i$  de  $8 \times 8$  *pixels*. La restricción de  $F$  a cada uno de ellos es una *subfoto*,  $f = F|_{Q_i}$ , que en la jerga se llama *data unit* y aquí denominaremos simplemente *bloque*. Todos ellos se tratan de la misma forma, así que se puede suponer

$$f : Q \longrightarrow C \quad \text{con} \quad Q = \{0, 1, 2, \dots, 7\} \times \{0, 1, 2, \dots, 7\} \quad \text{y} \quad C = \{-128, \dots, 127\}.$$

Evidente todas estas posibles funciones  $f$  que determinan un bloque pueden identificarse con un subconjunto del espacio vectorial  $V = \{f : Q \longrightarrow \mathbb{R}\}$ . Lo que vamos a hacer es hallar una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  y representar  $f$  por sus coordenadas en dicha base. Asignaremos a cada elemento de la base un número que indique lo distinguible que es a simple vista, y eliminaremos las coordenadas pequeñas de los elementos poco visibles, o las almacenaremos con menos precisión. Con este filtrado de las coordenadas perderemos información acerca

de  $f$ , pero apenas notaremos los cambios a simple vista. Es decir, habremos conseguido una compresión razonable del espacio en memoria que ocupa cada bloque y, por tanto, la imagen total  $F$ .

Diccionario:

- Foto en blanco y negro  $\longrightarrow F : R \longrightarrow C = \{-128, \dots, 127\}$
- Bloque de  $8 \times 8$  *pixels*  $\longrightarrow f : Q = \{0, 1, 2, \dots, 7\}^2 \longrightarrow C$
- Análisis del bloque  $f \longrightarrow$  Expresión de  $f$  en cierta base  $\mathcal{B}$  de  $V = \{f : Q \longrightarrow \mathbb{R}\}$
- Compresión  $\longrightarrow$  Eliminación o modificación de algunas coordenadas.

La pregunta natural es cómo escoger una base  $\mathcal{B}$  de  $V$ . Evidentemente hay infinitas posibilidades, pero buscamos una que sea adecuada. La idea parte del análisis de Fourier, que nos dice que “cualquier” función (señal) periódica de periodo  $L$  se puede expresar como una suma quizá infinita de  $\sin(2\pi kx/L)$  y  $\cos(2\pi kx/L)$  con ciertos coeficientes. De modo que para una función definida en  $[0, L]$  la serie de Fourier es su extensión periódica. Si sacrificamos esta última propiedad hay varios artificios para usar sólo senos o cosenos (a fin de cuentas  $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ ), lo cual puede ser útil computacionalmente, y con un poco de ingenio se puede acelerar la convergencia con respecto a la serie de Fourier usual. Por ejemplo, una función definida en  $[0, L]$  se expresa como una suma de cosenos de la forma  $\cos(\pi k(x + 1/2)/L)$ , con ciertos coeficientes. Para extender el resultado a dos dimensiones basta considerar productos de cosenos de esta forma, uno por cada variable.

En nuestro caso  $L = 8$  y sólo queremos analizar funciones discretas, es decir, con  $(x, y) = (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ . Si todo funcionase igual que en el caso continuo, las funciones

$$\phi_{kl}(n, m) = \cos\left(\frac{\pi k}{16}(2n + 1)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi l}{16}(2m + 1)\right)$$

debería dar lugar a una base. Ciertamente el argumento anterior es sólo un leve indicio o una ayuda a nuestra intuición. Necesitamos una prueba rigurosa.

**Proposición 2.3.**  $\mathcal{B} = \{\phi_{kl}\}_{k,l=0}^7$  es una base de  $V = \{f : Q \longrightarrow \mathbb{R}\}$ . De hecho es una base ortogonal con respecto al producto escalar “usual”

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n,m=0}^7 f(n, m)g(n, m).$$

DEM.: Cada función  $f \in V$  queda determinada por su valor en los 64 elementos de  $Q$ ,

por tanto  $\dim V = 64$ , y como  $\mathcal{B} \subset V$  con  $|\mathcal{B}| = 64$ ,  $\mathcal{B}$  es una base si y sólo si sus elementos son linealmente independientes. Para verlo basta comprobar que son ortogonales, ya que en ese caso

$$\sum_{k,l=0}^7 \lambda_{kl} \phi_{kl} = 0 \Rightarrow \sum_{k,l=0}^7 \lambda_{kl} \langle \phi_{kl}, \phi_{k_0 l_0} \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_{k_0 l_0} = 0.$$

Nótese que para  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < |a| < 16$ ,

$$\sum_{n=0}^7 \cos\left(\frac{\pi a}{16}(2n+1)\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^7 e^{i\pi a(2n+1)/16}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\pi a/16} \sum_{n=0}^7 e^{i\pi a n/8}\right) = 0.$$

(La última igualdad se sigue de la fórmula para sumar una progresión geométrica o usando las propiedades de las raíces de la unidad). Partiendo de la fórmula elemental

$$2 \cos\left(\frac{\pi k_1}{16}(2n+1)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2}{16}(2n+1)\right) = \cos\left(\frac{\pi(k_1 + k_2)}{16}(2n+1)\right) + \cos\left(\frac{\pi(k_1 - k_2)}{16}(2n+1)\right),$$

según lo anterior al sumar en  $n$  con  $0 \leq k_1, k_2 \leq 7$  el resultado es nulo excepto si  $k_1 - k_2 = 0$ . Cambiando  $k_1, k_2$  y  $n$  por  $l_1, l_2$  y  $m$ , se deduce en definitiva que  $\langle \phi_{k_1 l_1}, \phi_{k_2 l_2} \rangle = 0$  excepto si  $k_1 - k_2 = l_1 - l_2 = 0$ . ■

Nótese que  $\langle \phi_{00}, \phi_{00} \rangle = 8^2 = 64$  y del cálculo de la demostración se deduce que en el resto de los casos  $\langle \phi_{kl}, \phi_{kl} \rangle$  es  $4 \cdot 8$  o  $4 \cdot 4$  dependiendo de si  $k$  o  $l$  son cero o no. Una consecuencia inmediata es el *desarrollo de Fourier en serie discreta de cosenos* [Ma]:

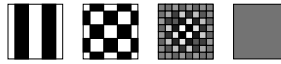
**Corolario 2.4.** Si  $f \in V$  entonces

$$f = \sum_{k,l=0}^7 \lambda_{kl} \phi_{kl} \quad \text{con} \quad \lambda_{kl} = \delta_k \delta_l \langle f, \phi_{kl} \rangle \quad \text{con} \quad \delta_n = \begin{cases} 1/8 & \text{si } n = 0 \\ 1/4 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

En vez de guardar los valores de los colores indicados por  $f$  en los 64 elementos de  $Q$ , podemos almacenar los coeficientes  $\lambda_{kl}$ , pero con ello todavía no hemos ganado nada, siguen siendo 64 números, incluso es peor, porque los  $\lambda_{kl}$  no son enteros en general, y al guardarlos en la memoria discreta de una computadora perdemos decimales.

El corolario anterior permite expresar un bloque  $f : Q \rightarrow C$  como una superposición (suma) de las fotos básicas correspondientes a ciertos múltiplos de las funciones de  $\mathcal{B}$ . Como todas las  $\phi_{kl}$ , excepto  $\phi_{00}$ , tienen promedio cero, todas estas fotos básicas, menos

la primera, se verán como un cuadrado del color correspondiente a cero (un gris medio) cuando estemos suficientemente lejos o si tenemos una vista poco aguda. Pero las más oscilatorias ( $k$  y  $l$  mayores) dejan de distinguirse antes. Con un ejemplo quedará más claro. Consideremos los cuadrados



Los tres primeros representan múltiplos de las funciones base  $\phi_{40}$ ,  $\phi_{44}$  y  $\phi_{77}$ . mientras que el último es un cuadrado de color cero. Si miramos desde lejos (quizá a unos metros) el tercero y el cuarto parecerán iguales: una mancha gris. Desde mucho más lejos puede que lleguemos a ver el segundo igual; y cuando apenas podemos distinguir los cuadrados, todos nos pareceran similares. En las imágenes en formato JPEG estos cuadrados suelen ser menores y por tanto el efecto es más acusado (además aquí está empobrecido por la poca calidad de impresión y porque seguramente el papel no está blanqueado).

La conclusión es que en general no pasa nada grave si cometemos un error pequeño en  $\lambda_{77}$  ya que  $\phi_{77}$  no se distingue demasiado de la función nula. El error que nos podemos permitir en  $\lambda_{44}$  es menor, y en  $\lambda_{04}$  menor todavía. Los chicos del JPEG son, como indica el acrónimo (*Joint Photographic Experts Group*), unos expertos que (¿ayudados por buenos “videntes”?) han mirado con cuidado los errores enteros máximos en cada coeficiente de manera que a simple vista no se note un gran cambio en la calidad de la imagen. Como en el mundo de la informática y aledaños todo debe tener un nombre ampuloso, estos números (los errores) se conocen como *coeficientes de cuantización*, y la tabla formada por ellos *matriz de cuantización*. Su elección es en principio arbitraria pero ellos recomiendan

$$E = \begin{pmatrix} e_{00} & e_{01} & \dots & e_{07} \\ e_{10} & e_{11} & \dots & e_{17} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{70} & e_{11} & \dots & e_{77} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{pmatrix}.$$

Lo que realmente se almacena (de manera comprimida) en un fichero `.jpg` no son los  $\lambda_{kl}$  sino la parte entera de  $\lambda_{kl}/e_{kl}$  que ocupa muy poca memoria, y que para las frecuencias altas ( $k, l$  grandes) tiene grandes posibilidades de ser cero porque los  $e_{kl}$  son en ese caso grandes. Evidentemente un fichero que tiene muchos ceros es susceptible de ser comprimido con diferentes algoritmos que no se discutirán aquí, aunque son una parte fundamental del éxito del formato. Cuando nos llega a través de la red un fichero `.jpg`, después de

descomprimirlo, nuestro ordenador trata de reconstruir los  $\lambda_{kl}$  aproximadamente a partir de las partes enteras de  $\lambda_{kl}/e_{kl}$ . Simplemente multiplicando por  $e_{kl}$  se comete un error máximo de  $e_{kl}$  según el siguiente sencillo resultado:

**Lema 2.5.** Sea  $e \in \mathbb{Z}^+$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $\tilde{\lambda} = eE(\lambda/e)$ , donde  $E = E(x)$  es la función parte entera, entonces  $0 \leq \lambda - \tilde{\lambda} < e$ .

DEM.: Dividiendo  $\lambda$  entre  $e$  se obtiene un cociente entero  $q$  y un resto  $0 \leq r < e$  de forma que  $\lambda = qe + r$ . Por tanto  $eE(\lambda/e) = eq = \lambda - r$ . ■

Finalmente el ordenador aproxima cada bloque de la imagen por  $\sum \tilde{\lambda}_{kl}\phi_{kl}$ , mostrando en pantalla algo muy parecido a la foto digitalizada original. (Esta explicación es un poco esquemática. En realidad los ficheros .jpg contienen también una cabecera con información por ejemplo acerca de la matriz de cuantización. Además en la práctica en la codificación se emplea la función *entero más cercano* en vez de la parte entera [Wa]).

El proceso descrito para la creación de un fichero .jpg a partir de una fotografía se puede entender como un filtrado de frecuencias eliminando casi siempre las mayores. Ésta es una situación que se repite en otros contextos: Por muy bien que queramos grabar un sonido, nos podemos olvidar de las frecuencias mayores que 20 000 Hz porque quizá a nuestro perro le gusten, pero superan nuestro nivel de audición (son ultrasonidos); o por mucha calidad que queramos dar a una película no es necesario que proyectemos los ultravioletas porque los espectadores no van a notar su existencia (a no ser que incrementemos su intensidad y se pongan morenos).

Veamos el efecto del filtrado de frecuencias sobre una imagen que conocemos bien.



En la primera imagen se han eliminado todos los  $\lambda_{kl}$  excepto  $\lambda_{00}$  (esto es como elegir

$e_{kl} = 256$  y  $e_{00} = 1$ ). En la segunda se incluyen también  $\lambda_{01}$ ,  $\lambda_{10}$ ,  $\lambda_{11}$  y  $\lambda_{02}$ , con lo cual la calidad mejora sensiblemente. Comparando estas imágenes podemos apreciar la singularidad de la función base  $\phi_{00}$  frente al resto de las  $\phi_{kl}$ . Al ser  $\phi_{00}$  constante, en la primera imagen cada bloque tiene el color de su promedio y el resultado es cubista o “cuadradista”. Las otras  $\phi_{kl}$  son oscilatorias de promedio cero y sirven para representar las variaciones que dan lugar a los detalles. En la jerga al uso, al coeficiente de  $\phi_{00}$  se le llama DC, y al resto AC. Estos AC y DC significan lo mismo que en el *High Voltage* o en los alimentadores de nuestros dispositivos electrónicos, puesto que son las siglas de *Altern Current* y *Direct Current* (evidentemente, corriente alterna y corriente continua).

En la siguiente imagen se consideran todos los  $\lambda_{kl}$  con  $0 \leq k, l < 4$ . A pesar de ser únicamente la cuarta parte de los coeficientes, la calidad es bastante aceptable. Podemos potenciar ciertos efectos notando por ejemplo que los  $\phi_{kl}$  con  $k$  pequeño presentan pocas variaciones horizontales y por tanto no permiten distinguir detalles en esta dirección. Como se ve en la última imagen, anulando todos los  $\lambda_{kl}$  excepto las que tienen  $k = 0$ , se logra perder precisión en las líneas horizontales frente a la verticales.



De nuevo hay que tener en cuenta que la calidad de impresión (y un ligero filtrado previo para poder manipular los ficheros) perjudican en cierta medida la calidad de las imágenes tal como aparecen aquí.



## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Indicar por qué y en qué sentido las frecuencias grandes se suelen despreciar en el formato JPEG. b) Explicar para qué sirve la matriz de cuantización.

2) Hallar los  $\lambda_{kl}$  de una foto que consta de un solo punto.

3) Repetir el problema anterior para una recta horizontal, simplificando al máximo los  $\lambda_{kl}$ .

4) Demostrar que todos los valores de las funciones  $\phi_{kl}(n, m)$  se pueden calcular a partir de  $\cos(\pi/16)$  efectuando sólo sumas restas y multiplicaciones. (Una forma computacionalmente útil de organizar las operaciones da lugar a la conocida FFT *Fast Fourier Transform* [Ge], [Ta]).

5) Probar que si los bloques tuvieran  $j \times j$  pixels en lugar de  $8 \times 8$ , entonces  $\phi_{kl}(n, m) = \cos(\frac{\pi k}{2j}(2n+1)) \cdot \cos(\frac{\pi l}{2j}(2m+1))$  con  $k, l \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ , sería una base ortogonal de  $V$ . Hallar  $\delta_n$ .

6) Suponiendo un bloque de  $3 \times 3$  pixels con  $f(n, m) = -128$  si  $n, m \in \{0, 1\}$  y  $f(n, m) = 0$  si  $n = 2$  o  $m = 2$ ; calcular los  $\lambda_{kl}$  con la base del problema anterior. Hallar también los valores de  $f$  que se reconstruirían si la matriz de cuantización tuviera  $e_{ij} = 20(1+i+j)$ ,  $i, j \in \{0, 1, 2\}$  y se cuantizara redondeando al entero más cercano.

7) Probar que  $\tilde{\mathcal{B}} = \{\psi_{kl}\}_{k,l=0}^7$  con  $\psi_{kl}(n, m) = e((kn+lm)/8)$  es una base de  $V = \{f : Q \rightarrow \mathbb{C}\}$ , y que es ortogonal con el producto escalar  $\langle f, g \rangle = \sum \bar{f}(n, m)g(n, m)$ . Hallar la fórmula para los  $\lambda_{kl}$  y tratar de encontrar alguna ventaja y algún inconveniente si  $\mathcal{B}$  se reemplaza por  $\tilde{\mathcal{B}}$ .

8) Hallar una fórmula para  $\sum_{n,m=0}^7 (f(n, m))^2$  en términos de los  $\lambda_{kl}$ .

9) Probar que  $\{\psi_{kl}\}_{k,l=1}^6$  con  $\psi_{kl}(n, m) = \sin(\frac{\pi kn}{7}) \cdot \sin(\frac{\pi lm}{7})$  es una base ortogonal del subespacio de  $V$  formado por las funciones que se anulan en el borde de  $Q$ .

10) Calcúlese la serie de Fourier (introducida en la sección anterior) de la función parte fraccionaria. Comprobar que la serie no converge absolutamente y que en 0 y 1 ni siquiera converge al valor de la función tomando el límite de las sumas parciales con  $|n| \leq N$ ,  $N \rightarrow \infty$ . (Esto prueba los efectos negativos globales que tienen las discontinuidades sobre la serie de Fourier, y refleja las deficiencias del formato JPEG al enfrentarse a bordes abruptos).

11) Dada  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  se define su extensión par  $f_p : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f_p(x) = f(|x|)$ . Dando por supuestas buenas propiedades de convergencia de la serie de Fourier de  $f_p$  en  $[-L, L]$ , demostrar que  $f(x) = \sum c_n \cos(\frac{\pi n}{L}x)$  para  $x \in [0, L]$ . Concluir que, bajo buenas condiciones de convergencia, para  $f : [-1/2, L-1/2] \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene  $f(x) = \sum d_n \cos(\frac{\pi n}{2L}(2x+1))$ .

## SECCIÓN 2.2

### **Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos** (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- Compresión fractal de imágenes y otros métodos de compresión.
- Tratamiento y análisis de señales.
- El principio de incertidumbre.

#### Generales:

- Prospecciones geológicas.
- Estrategias en las apuestas quinielísticas.

#### **Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*Detrás de la serie de Fourier, otras series análogas han entrado en los dominios del análisis y lo han hecho por la misma puerta; han sido imaginadas en vista de sus aplicaciones. [Po] p. 101.*

## 2.3. Buscando la luz

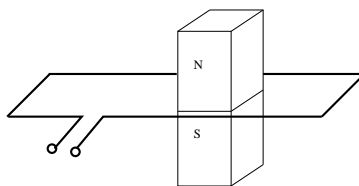
Uno de los descubrimientos científicos que han influido más drásticamente en nuestra vida cotidiana es el de las ondas electromagnéticas. Históricamente dicho descubrimiento lo llevó a cabo H. Hertz en un primitivo laboratorio en 1888, y su aplicación práctica a las telecomunicaciones fue obra en gran medida de G. Marconi, a caballo entre los siglos XIX y XX. Pero difícilmente esto habría sido posible sin el modelo teórico introducido por J.C. Maxwell en 1873. En su famoso tratado [Mx] describe minuciosamente experimentos y resultados anteriores, y después de pasarlos por los métodos del incipiente Cálculo Vectorial (una de las primeras pruebas del teorema de Stokes está en [Mx]), los transforma en las famosas *ecuaciones de Maxwell*.

Como éste no es el lugar adecuado para estudiar Electrodinámica, nos limitaremos a una descripción somera e incompleta de la situación física (véase [Fe-Le-Sa] para profundizar). Los campos eléctrico y magnético se indican respectivamente mediante dos funciones vectoriales  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . La propia ley de Coulomb en el caso estático y, en cualquier caso, experimentos muy precisos, muestran que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que no encierra cargas es nulo. Ésta es la *ley de Gauss*. En términos matemáticos, en ausencia de cargas

$$(2.3) \quad \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{para } S \text{ superficie cerrada.}$$

Esto es algo así como decir que si no hay fuentes de campo eléctrico internas, lo que entra en  $S$  por un lado sale por otro.

La relación entre el campo eléctrico y el magnético es hoy día bien conocida por medio del principio de la dinamo. Al pasar un imán por una espira conductora  $L$  aparece una corriente eléctrica circulando por ella, y cuanto más deprisa pasemos el imán o cuantos más imanes pongamos en la superficie  $S$  que limita la espira, mayor es la fuerza electromotriz inducida.



Esto hace pensar que la variación del flujo del campo magnético es proporcional a la circulación del campo eléctrico por la espira. En una fórmula:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = K \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Cuando el flujo aumenta, la circulación eléctrica va en sentido negativo, así que  $K < 0$ , y se

han elegido las unidades en el Sistema Internacional de forma que  $K = -1$ . En definitiva, se tiene la *ley de Faraday-Henry*:

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{para } S \text{ superficie con frontera } L.$$

Los fenómenos eléctricos y magnéticos son en cierto modo simétricos, y al igual que la ley de Coulomb conduce a (2.3), la ley de Ampère-Laplace [**Al-Fi**] o, siguiendo a Maxwell, los “monopolos magnéticos” (no se sabe si existen) [**Go**] p. 157, conducen a la *ley de Gauss para el campo magnético*:

$$(2.5) \quad \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{para } S \text{ superficie cerrada.}$$

Por ello no es extraño que se cumpla el análogo de (2.4) aunque no se puedan ajustar simultáneamente las unidades, de manera que el  $-1$  debe reemplazarse por otra constante más fea, que esta vez es positiva y denotaremos con  $c^2$ . Este análogo de (2.4) se llama *ley de Ampère-Maxwell* o quizá más propiamente *ley de Maxwell*:

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = c^2 \int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad \text{para } S \text{ superficie con frontera } L.$$

Donde se supone que no hay cargas (corrientes) atravesando  $S$ . En realidad esta ecuación es difícil de comprobar experimentalmente por el típicamente pequeñísimo valor de  $\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ . Maxwell llegó a ella considerando el caso en que había cargas libres y probando que si no se cumpliese (2.6) con una constante específica, la carga total no se conservaría [**Al-Fi**], [**Fe-Le-Sa**]. Actualmente se conoce que  $c^2 = 8'9874 \cdot 10^{16}$ , la estimación de Maxwell fue algo peor [**Mx**]. Quizá por la notación, o extrayendo su raíz cuadrada, muchos se percatarán de que no es una constante tan fea.

#### Diccionario:

- Campos eléctrico y magnético  $\longrightarrow$  Funciones vectoriales  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  que satisfacen (2.3), (fuera de las cargas) (2.4), (2.5) y (2.6).

Vamos a probar que necesariamente  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son ondas, en el sentido de que cada una de sus componentes verifican la ecuación de ondas. Con este fin escribiremos, al igual que hizo Maxwell, las ecuaciones anteriores en una forma más sintética.

**Proposición 2.6.** Sean  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$  y  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$  funciones vectoriales regulares  $\vec{E}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$  verificando (2.3), (2.4), (2.5) y (2.6). Entonces también satisfacen las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

$$(2.7) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Además cada una de sus componentes verifican la ecuación de ondas  $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \Delta u$  donde  $\Delta$  es el operador laplaciano  $\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ .

DEM.: Aplicando el teorema de la divergencia a (2.3) y (2.5) se tiene

$$\int_R \operatorname{div} \vec{E} \, d\text{Vol} = 0 \quad \text{y} \quad \int_R \operatorname{div} \vec{B} \, d\text{Vol} = 0$$

donde  $R$  es la región sólida acotada por  $S$ . Como  $S$  es arbitraria se deduce  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  y  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

Introduciendo la derivada bajo el signo integral en (2.4) y (2.6), y aplicando el teorema de Stokes

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{y} \quad \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = c^2 \int_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Al pasar todo a un miembro, se tiene que los flujos de  $\partial \vec{B} / \partial t + \operatorname{rot} \vec{E}$  y de  $\partial \vec{E} / \partial t - c^2 \operatorname{rot} \vec{B}$  son nulos a través de cualquier superficie, por lo que ambos campos deben ser nulos.

Antes de seguir mencionaremos la relación

$$(2.8) \quad \Delta \vec{F} - \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F}$$

donde el laplaciano actúa sobre  $\vec{F}$  coordenada a coordenada. Probarlo se reduce a un cálculo tedioso.

Al derivar con respecto de  $t$  la cuarta ecuación de (2.7) y sustituyendo la tercera, se sigue

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Empleando (2.8) y  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  se llega inmediatamente a la ecuación de ondas. De la misma forma, al derivar con respecto de  $t$  la tercera ecuación de (2.7) y sustituir la cuarta, se llega a (2.9) con  $\vec{B}$  en lugar de  $\vec{E}$ , y por tanto  $\vec{B}$  también satisface la ecuación de ondas. ■

En 1873 nadie creía haber visto nunca una onda electromagnética, pero Maxwell conjeturó que se engañaban porque la luz era una onda electromagnética. Su conjetura

venía avalada por el hecho de que la velocidad  $c$  de las soluciones de la ecuación de ondas era parecida según sus cálculos (e idéntica según los actuales) a la velocidad de la luz. Con la maquinaria matemática adecuada es posible deducir propiedades ópticas como la difracción a partir de las ecuaciones de Maxwell [Co]. Por otro lado, cuando Hertz descubrió las primeras ondas electromagnéticas invisibles, dedicó parte de sus esfuerzos a comprobar las propiedades que compartían con la luz, en especial la reflexión.

Para explicar en qué sentido las soluciones de la ecuación de ondas son ondas de velocidad  $c$ , fijémonos en el caso de una dimensión espacial, en el que la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Su solución general es

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{con} \quad u_1 = f(x - ct), \quad u_2 = g(x + ct)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones  $C^2$  arbitrarias. Nótese que la gráfica de  $u_1$  para  $t = 0$  coincide con la de  $f$ ; para  $t = 1$  se traslada  $c$  unidades a la derecha; para  $t = 2$  se traslada  $2c$  unidades, etc. Lo mismo ocurre con  $u_2$  salvo que ahora la gráfica viaja a la izquierda con velocidad  $c$ . El caso tridimensional general es geoméricamente más complejo [Co], [Fe-Le-Sa] §20) pero cualitativamente similar: un “pulso” que pasa por cierto punto tarda en llegar a otro punto situado a distancia  $d$  un tiempo  $d/c$ . Por ejemplo, la solución general cuando  $u(\vec{x}, 0) = 0$  viene dada por [Dy-Mc]

$$u(\vec{x}, t) = t^{-1} \int f(\vec{x} + ct\vec{v}) dS(\vec{v})$$

donde la integral se extiende a la esfera unidad  $\|\vec{v}\| = 1$ . Para  $f$  muy concentrada en el origen, al cabo de  $t$  segundos observaremos una onda esférica en  $\|\vec{x}\| = ct$ .

Al igual que en el caso de la ecuación del calor, los desarrollos de Fourier y sus generalizaciones se muestran como un instrumento fundamental para el estudio de las soluciones de la ecuación de ondas que satisfacen ciertas condiciones de contorno especificadas.

Epílogo: A principios del siglo XX había evidencias teóricas y experimentales que sugerían que las ecuaciones de Maxwell eran ciertas en cualquier sistema inercial (para observadores en reposo o con velocidad constante), y ésta fue la base para la creación de la Teoría de la Relatividad [Po] §VIII. Sin entrar en detalles, supóngase que buscamos cambios lineales entre diferentes sistemas de referencia que dejen fijos el operador correspondiente a la ecuación de ondas,  $\square = c^2\Delta - \partial^2/\partial t^2$ , entonces se llega indefectiblemente a que la única posibilidad son las transformaciones de Lorentz.

**Proposición 2.7.** *Las aplicaciones lineales invertibles  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  que verifican  $\square(u \circ T) = (\square u) \circ T$  para toda  $u = u(x, y, z, t) \in C^2$ , coinciden con las que dejan invariante*

la forma cuadrática  $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ , llamadas transformaciones de Lorentz (generalizadas).

Nota: Orientando adecuadamente los ejes espaciales, las transformaciones de Lorentz generalizadas se reducen a la transformación de Lorentz por antonomasia que aparece en los libros de Física [A1-Fi] §6.6. Siguiendo a Minkowski (que había sido profesor de Einstein), estas transformaciones se pueden entender como los movimientos rígidos en  $\mathbb{R}^4$  dotado de una distancia “rara” (no es positiva) que viene definida a través de la forma cuadrática de la proposición [G1]. Esta interpretación geométrica le pareció inicialmente inútil a Einstein, pero más tarde se mostró necesaria para llegar a entender la gravitación.

DEM.: Para  $u$  suficientemente regular, por la fórmula de inversión

$$u(T\vec{x}) = \int \widehat{u}(\vec{\xi}) e(-T\vec{x} \cdot \vec{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \quad \text{con } \vec{x} = (x, y, z, t).$$

Escribiendo  $T\vec{x} \cdot \vec{\xi} = \vec{x} \cdot (T^t \vec{\xi})$  y aplicando  $\square$  se llega a

$$\square(u \circ T)(\vec{x}) = 4\pi^2 \int \widehat{u}(\vec{\xi}) P(\vec{\xi}) e(-T\vec{x} \cdot \vec{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$$

donde  $P(\vec{\xi}) = (T^t \vec{\xi})^t D (T^t \vec{\xi})$  y  $D$  la matriz diagonal con  $d_{11} = d_{22} = d_{33} = c^2$ ,  $d_{44} = -1$ . Al comparar con  $(\square u)(T\vec{x})$  se tiene que debe cumplirse  $P(\vec{\xi}) = \vec{\xi}^t D \vec{\xi}$ . De aquí  $TDT^t = D$  o equivalentemente  $(T^{-1})^t c^2 D^{-1} T^{-1} = c^2 D^{-1}$ . Como  $c^2 D^{-1}$  es la matriz de  $Q$ , se sigue que  $Q(T^{-1}\vec{x}) = Q(\vec{x})$ , o cambiando  $\vec{x}$  por  $T\vec{x}$ ,  $Q(\vec{x}) = Q(T\vec{x})$ . ■





## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Explicar por qué  $\text{div } \vec{E} = 0$  indica que el flujo eléctrico es nulo. b) Deducir la ecuación  $\partial \vec{B} / \partial t = -\text{rot } \vec{E}$  a partir de su significado experimental.

2) En electrodinámica se suele escribir  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  y  $\vec{E} = -\nabla \phi - \partial \vec{A} / \partial t$  donde  $\phi$  y  $\vec{A}$  son funciones que verifican  $c^2 \text{div } \vec{A} + \partial \phi / \partial t = 0$  llamadas potencial escalar y potencial vectorial, respectivamente. Probar, usando las ecuaciones de Maxwell, que  $\square \vec{F} = \vec{0}$  donde  $\vec{F}$  es un campo vectorial de  $\mathbb{R}^4$  definido por  $\vec{F} = (c^{-1} \phi, \vec{A})$  y  $\square = c^2 \Delta - \partial^2 / \partial t^2$ .

3) Sea  $\phi \in C_0^2$  y  $\vec{n}$  un vector unitario. Comprobar que  $u(\vec{x}, t) = \phi(ct - \vec{n} \cdot \vec{x})$  es solución de la ecuación de ondas. Tratar de explicar por qué se dice que ésta es una *onda plana*.

4) Supongamos que  $E_3 = 0$  y que  $E_1$  y  $E_2$  no dependen de la variable  $z$ . Demostrar que si en algún instante  $B_1$  y  $B_2$  se anulan, entonces se anulan para todo tiempo.

5) Sea  $A_+$  y  $A_-$  los operadores  $A_{\pm} = \partial / \partial t \pm c \partial / \partial x$ . Comprobar que la ecuación de ondas se puede escribir como  $A_- A_+ u = 0$ . Escribiendo  $u(x, t) = v(x + ct, x - ct)$  con  $v(a, b) = u(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2c})$ , demostrar que su solución general es  $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ .

6) En presencia de una distribución continua de cargas, la primera ecuación de Maxwell debe modificarse a  $\text{div } \vec{E} = \epsilon_0^{-1} \rho$  donde  $\epsilon_0$  es una constante y  $\rho$  es la densidad de carga (carga por unidad de volumen). Probar que en ese caso  $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0^{-1} Q$  donde  $Q$  es la carga total encerrada por la superficie cerrada  $S$ .

7) Considérese la ecuación de ondas unidimensional en  $0 \leq x \leq 1$  bajo las condiciones de contorno  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Probar que la *energía*  $\int_0^1 (\partial u / \partial t)^2 dx + c^2 \int_0^1 (\partial u / \partial x)^2 dx$  es constante. Tratar de generalizar este hecho al caso tridimensional (para ello conviene recordar la identidad de Green).

8) Sea  $G$  un giro de ángulo  $\alpha$  alrededor de uno de los ejes. Probar que si  $\vec{E}$  verifica la primera ecuación de Maxwell entonces  $G \vec{E} \circ G^{-1}$  también lo hace. Tratar de explicar el significado físico.

9) La transformación de Lorentz actúa como  $(x, t) \mapsto (\gamma(x - vt), \gamma(t - vx/c^2))$  con  $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Comprobar que deja la forma cuadrática  $x^2 - c^2 t^2$  invariante y demostrar directamente que si una función satisface la ecuación de ondas unidimensional, al transformar las variables de esta forma la sigue cumpliendo.

10) Explicar por qué la relación  $\frac{d}{dt} \int_R \rho d\text{Vol} = - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$  se conoce con el nombre de “ley de conservación de la carga” donde  $\rho$  es la densidad de carga,  $\vec{v}$  es la velocidad de las cargas en cada punto, y  $R$  es una región sólida arbitraria con frontera  $S$ .

11) Demostrar que  $\Delta \vec{F} = \nabla(\text{div } \vec{F}) - \text{rot rot } \vec{F}$ .

SECCIÓN 2.3

## Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros (el precio de esta fotocopia)

De la sección:

- Difracción.
- Comentario paso a paso del famoso artículo de Einstein en 1905 sobre la relatividad especial.
- La ecuación de Dirac (sólo aconsejable si se tienen conocimientos previos de Física).
- Circuitos electrónicos.

Generales:

- Aplicaciones de la Teoría de Grupos.
- Ecuaciones básicas de la Física Cuántica.

### Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

*Cuando Maxwell hubo comenzado sus trabajos, las leyes de la electrodinámica admitidas hasta entonces daban cuenta de todos los hechos conocidos. No había ninguna experiencia nueva que hubiera venido a invalidarlas.*

*Pero examinándolas según un ángulo nuevo, Maxwell reconoció que las ecuaciones se vuelven más simétricas cuando se les agrega un término. Por otra parte, este término era demasiado pequeño para introducir efectos apreciables con los métodos antiguos.*

*Se sabe que los concimientos a priori de Maxwell han esperado veinte años una confirmación experimental. Si preferís, Maxwell ha precedido en veinte años a la experiencia.*

*¿Cómo se ha obtenido este triunfo?*

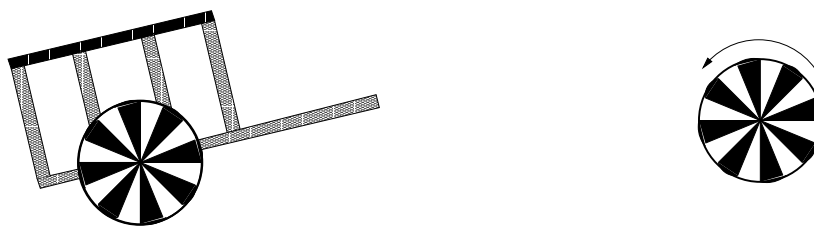
*Porque Maxwell estaba profundamente impregnado del sentimiento de la simetría matemática. ¿Habría sido lo mismo si otros no hubieran investigado antes esa simetría por su propia belleza? [Po] p. 97.*

## Corriente alterna, corriente continua

### Material:

- Una rueda que se pueda hacer girar rápido (por ejemplo de un juguete).
- Cartulina blanca.
- Un rotulador oscuro.
- Una linterna a pilas

Comenzaremos cortando un círculo de cartulina blanca que podamos pegar o ajustar con cuerdas a la rueda que gira. Si ésta tiene algún eje que sobresalga se puede dar a la cartulina forma ligeramente cónica (como un gorro chino). Dividiremos el círculo en cierto número par de sectores iguales y colorearemos uno de cada dos con el rotulador (como una sombrilla). A no ser que la rueda se pueda hacer girar realmente muy rápido no conviene hacer un número de sectores inferior a 20 o 30\*.



Lo que vamos a reproducir es el fenómeno que tantas veces se ve en la televisión o el cine, consistente en que las aspas de un helicóptero o los tapacubos de un coche parecen estar por un instante detenidos o girar en sentido contrario. Para ello daremos impulso en sentido positivo a la rueda lo más rápido posible y utilizaremos para ver el fenómeno la luz artificial de cualquier lámpara doméstica con bombillas de incandescencia (normales y corrientes). Casi todo el tiempo veremos la rueda de color uniforme, pero en cierto momento los sectores avanzarán lentamente en el sentido de giro hasta detenerse un instante y cambiar de sentido. Si la rueda gira muy deprisa veremos el efecto más de una vez. Por si no fuera ya curioso el fenómeno, resulta que desaparece completamente al iluminar la rueda con la luz de la linterna o al usar luz natural.

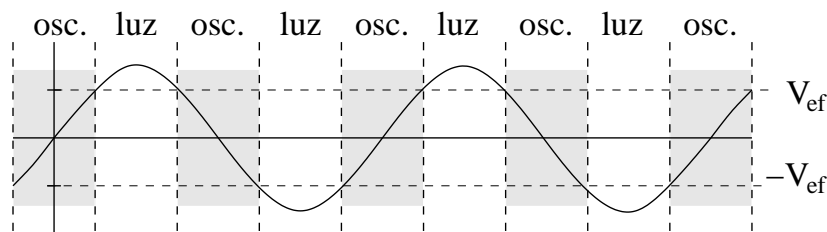
Explicación: La corriente eléctrica de uso doméstico es una onda sinusoidal que oscila 50 veces por segundo (frecuencia 50  $Hz$ ). Es decir, el voltaje que sale de nuestros enchufes

---

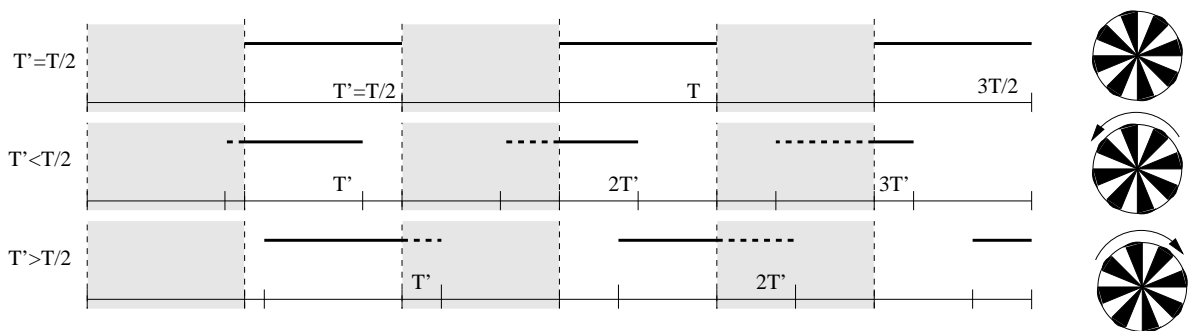
\* *N. del A.* Ajusté con cuerdas la cartulina dividida en 24 sectores a una rueda hueca (con radios) de 7 cm de diámetro de una pequeña calesa decorativa.

viene determinado por una ecuación del tipo  $V(t) = V_0 \text{sen}(100\pi t)$ . Lo que aprovechan los aparatos electrodomésticos de esta tensión oscilante que varía entre  $-V_0$  y  $V_0$  cada  $T = 1/50 = 0'02$  segundos es lo que se llama *tensión eficaz* [Ru] §6.10, que viene dada por la norma dos normalizada en cada periodo, esto es,  $V_{ef}^2 = T^{-1} \int_0^T |V(t)|^2 dt$ . Sustituyendo,  $V_{ef} = V_0/\sqrt{2}$ . En la electricidad doméstica  $V_{ef} = 220 V$ , de modo que el voltaje de nuestros enchufes alcanza picos de  $V_0 = 220\sqrt{2} = 311'1 V$ .

En los intervalos de la forma  $(-T/8+nT/2, T/8+nT/2)$  se cumplirá  $|V(t)| < V_{ef}$ , con lo cual la bombilla de nuestra lámpara alumbrará poco, mientras que el resto del tiempo se cumple la desigualdad contraria. Es decir, cada  $T/2$  segundos habrá habido una fase de “luz” y otra de “oscuridad”. Es como encender y apagar la luz con periodo  $T/2$ .



Si miramos a un punto fijo de la rueda, los sectores blancos y oscuros se sucederán con un periodo pequeño. Por ejemplo, si hay 15 sectores oscuros y la rueda da seis vueltas por segundo el periodo es  $T' = 1/90$ . Si  $T' = T/2$  entonces justamente la luz estará encendida siempre en el instante en que un mismo tipo de sector (blanco u oscuro) está en el punto fijado, con lo cual nos parecerá que los sectores se paran. En el instante anterior la rueda iba un poco más rápida y por tanto  $T' = T/2 - \epsilon$ . Así pues, tras los  $T/2$  segundos que transcurren desde que la luz se enciende hasta que se vuelve a encender, como los sectores oscilan un poco más rápido, les habrá dado tiempo a ir un poco más lejos de la siguiente posición y parecerá que se desplazan en sentido positivo. El efecto contrario se produce cuando por causa de la deceleración  $T' = T/2 + \epsilon$ .



Como la linterna funciona con pilas (corriente continua), su luz, al igual que la del sol, no presenta oscilaciones y anula el efecto descrito.

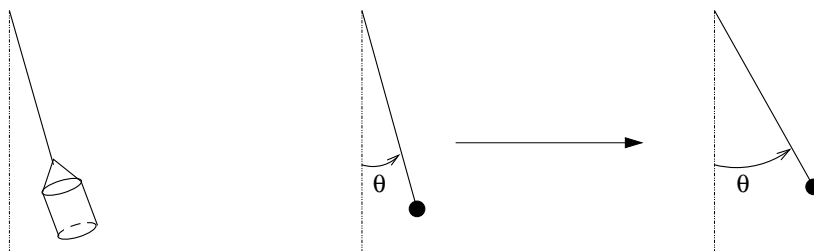
## Subes o bajas

### Material:

- Un imán de nevera.
- Un objeto ferromagnético pesado.
- Una cuerda resistente.
- Un cordel.

Colguemos el objeto pesado de la cuerda resistente para formar un péndulo. Atemos el imán de nevera con el cordel y peguémoslo al objeto pesado asegurándonos de que con un leve tirón se despega, y el péndulo queda oscilando ligerísimamente\*

Ahora, partiendo de la posición de equilibrio y con el imán pegado, hay que tener un poco de paciencia, y tirar del cordel imperceptiblemente tratando de seguir las casi invisibles oscilaciones del péndulo. Después de unos cuantos intentos, el péndulo se habrá puesto en movimiento.



Si seguimos haciendo que el estiramiento del cordel acompañe al movimiento del péndulo podremos conseguir una amplitud en las oscilaciones asombrosa. Sobre todo teniendo en cuenta que al principio habíamos comprobado que el imán apenas tenía fuerza para modificar la posición de equilibrio.

Explicación: Igualando la fuerza a la componente tangencial del peso, como es bien conocido, se sigue la ecuación que rige el péndulo simple  $l\theta'' = g \sin \theta$ , donde  $l$  es la longitud y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Para ángulos no muy grandes,  $\sin \theta \approx \theta$  y la ecuación se reduce a  $\theta'' = g\theta$ . Si el movimiento parte del punto de máxima elongación, la solución de esta ecuación es de la forma:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{g/l}.$$

---

\* *N. del A.* Empleé un cubo metálico cargado con algunas cosas. Su peso era de 6'3 kg. Para debilitar más todavía la fuerza del imán, lo recubrí con papel. De esta manera el péndulo apenas se desviaba de su posición inicial antes de que se soltase el imán.

Para ser realistas, el movimiento de un péndulo siempre se amortigua por el rozamiento del aire, y éste, dentro de cierta aproximación, viene dado por un múltiplo pequeño de la velocidad [Al-Fi] §7.10 (mayor velocidad  $\Rightarrow$  mayor resistencia). Por tanto, un modelo bastante aproximado del movimiento del péndulo sin nuestra acción externa es:

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta + 2\delta\theta' = 0 \quad \text{para cierto } \delta > 0.$$

El análogo de la solución anterior, es ahora, para  $\delta < \omega_0$ ,

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t} \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}).$$

Es decir, el movimiento se amortigua, como era de esperar. Además la frecuencia no varía con el tiempo ([Ga] p. 201).

La situación descrita en nuestro experimento corresponde a aplicar una fuerza sincrónica con el péndulo, de frecuencia  $\omega$  muy próxima a  $\omega_0$ . Esta fuerza estará representada por un nuevo término de la forma  $\epsilon \cos(\omega t)$  con  $\epsilon$  pequeño. Hay que resolver, por tanto

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta + 2\delta\theta' = \epsilon \cos(\omega t).$$

Una solución particular de esta ecuación es  $B \cos(\omega t + \eta_0)$  con un  $\eta_0$  adecuado y

$$B = \frac{\epsilon}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$

Mientras que la solución general es de la forma

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t} \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} + \alpha) + B \cos(\omega t + \eta_0).$$

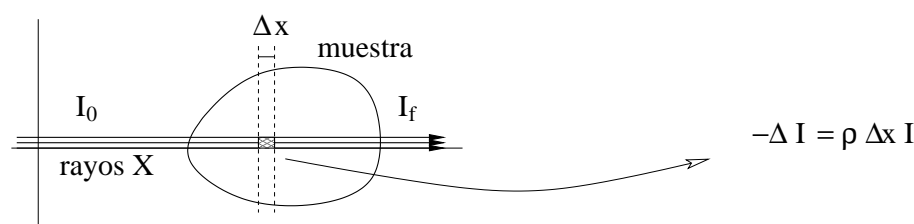
Con  $A$  y  $\alpha$  dependiendo de las condiciones iniciales. Según crezca el tiempo, el primer término se hará despreciable, y si  $\omega \approx \omega_0$  el término restante tendrá amplitud  $B \approx \epsilon/(2\delta\omega)$ . Si el rozamiento del aire es poco significativo, el resultado será mucho mayor que  $\epsilon$ . De hecho  $B \rightarrow \infty$  si  $\delta \rightarrow 0$ . Por tanto con pequeñas fuerzas, a la larga se pueden obtener grandes amplitudes si se emplea la frecuencia correcta. Éste es el famoso fenómeno de la *resonancia*. Aquí nos hemos centrado en un ejemplo mecánico, pero hay ecuaciones similares que regulan los circuitos electrónicos básicos [Ru]. De esta forma, la resonancia es el principio por el cual los receptores de radio y televisión pueden “cazar” selectivamente la frecuencia correspondiente a una sola emisión. Ya nos ocuparemos nosotros de cambiar rápidamente de canal para ver y oír todos al tiempo.

### 3. Tomografía

#### 3.1. Sala de espera, fase primera

Desde los años setenta se han desarrollado diversos métodos [Na] para poder *rajar* a la gente de forma virtual (desafortunadamente los métodos reales son más antiguos), lo cual es de gran utilidad en la práctica médica. El método más espectacular quizá sea la Resonancia Magnética Nuclear. Su complejidad, aunque no extrema, la saca fuera del contenido del curso. A cambio veremos en esta sección, parcialmente plagiada de [Ch], un sencillo método llamado de *reconstrucción algebraica*, y en la sección posterior otro más eficiente y más próximo al empleado habitualmente cuando se realiza una TAC (tomografía axial computerizada). En este tipo de tomografías se emplea la atenuación que sufren los rayos X al atravesar los tejidos, lo que nos lleva a introducir un pequeño *modelín* previo, el cual es una versión simplificada de la llamada *ecuación del transporte* [Ra-Ka].

Ya sabemos que ni la persona más robusta puede detener los rayos X (que si se enfadan incluso pueden convertirle en un superhéroe o algo peor), pero las luces y sombras de las radiografías prueban que hasta el más alfeñique es capaz de atenuarlos un poco. Parece claro que cuando una muestra es atravesada por un fino haz de rayos X de intensidad  $I$ , la disminución de dicha intensidad depende de la densidad  $\rho$  de la muestra (el plomo es más opaco a los rayos X que el aire) y de su grosor (un muro de dos metros atenúa menos que otro de cinco). Si dividimos la zona atravesada por los rayos en pequeñas rodajas transversales de tamaño infinitesimal, en las que la densidad sea prácticamente constante, es natural suponer que la proporción en que disminuye la intensidad es directamente proporcional a ambas cantidades, digamos con constante de proporcionalidad uno mediante una elección adecuada de las unidades.



Pasando al límite en la anchura de las rodajas:

$$-dI = \rho I dx \Rightarrow I' = -\rho I \Rightarrow -(\log I)' = \rho.$$

De modo que si  $I_0$  es la intensidad inicial (antes de entrar en la muestra) e  $I_f$  la final (después de salir), integrando se tiene

$$\log I_0 - \log I_f = \int \rho.$$

Evidentemente, si los rayos siguen una recta  $L$ , en vez del eje  $OX$ , la integral anterior es la integral de línea a lo largo de  $L$ .

En definitiva, lo que debemos tener en mente es que midiendo intensidades iniciales y finales podemos saber las integrales de la densidad a lo largo de las líneas rectas que siguen los rayos.

Los algoritmos de reconstrucción algebraica comienzan considerando una versión discretizada (digitalizada) de la sección que se quiere examinar. Con tal fin, introducimos una malla cuadrada de  $M \times M$  cuadraditos (*pixels*). Si la malla es suficientemente fina, la densidad es aproximadamente constante en cada cuadradito. Así que se puede considerar que hay una matriz de densidades  $M \times M$  donde el elemento  $\rho_{ij}$  es la densidad en el cuadradito  $c_{ij}$ . Por otra parte, la atenuación de un rayo a lo largo de una recta  $L$  permite conocer  $\int_L \rho$  que, en esta versión digitalizada, se aproxima por una suma de Riemann, y de hecho coincide con ella suponiendo  $\rho$  es realmente constante en cada  $c_{ij}$ ,

$$(3.1) \quad \log(I_0/I_f) = \int_L \rho = \sum \rho_{ij} |c_{ij} \cap L|$$

Diccionario:

- Sección cuadrada digitalizada  $\longrightarrow$  malla formada por cuadrados  $c_{ij}$ .
- Densidad del pixel  $ij$  constante  $\longrightarrow \rho|_{c_{ij}} = \rho_{ij}$ .
- $\log(I_0/I_f) = \int \rho \longrightarrow \log(I_0/I_f) = \sum \rho_{ij} |c_{ij} \cap L|$ .

Aparentemente el problema ya está resuelto: queremos calcular el valor de las incógnitas  $x_1 = \rho_{11}, x_2 = \rho_{12}, x_3 = \rho_{13}, \dots, x_{M^2} = \rho_{MM}$  y, según (3.1), para cada rayo tenemos una ecuación lineal en estas incógnitas; basta tomar un número suficiente de rayos y resolver el sistema lineal correspondiente.

	rayo 1	rayo 2	
↓	$\rho_{11}$	$\rho_{12}$	$\rho_{13}$
↓	$\rho_{21}$	$\rho_{22}$	$\rho_{23}$
↓	$\rho_{31}$	$\rho_{32}$	$\rho_{33}$
↓	$\rho_{41}$	$\rho_{42}$	$\rho_{43}$
↓			$\rho_{44}$
↑	↑ h		

$$\log \frac{I_0^1}{I_f^1} = h(\rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{31} + \rho_{41})$$

$$\log \frac{I_0^2}{I_f^2} = h\sqrt{2}(\rho_{41} + \rho_{32} + \rho_{23} + \rho_{14}) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = b_1 \\ x_{13} + x_{10} + x_7 + x_4 = b_2 \\ \dots \text{ etc } \dots \end{cases}$$

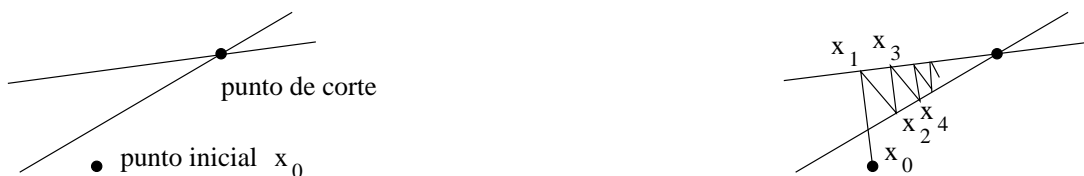
Puede que esto resuelva el problema desde el punto de vista teórico, pero la aplicación práctica requiere ir más allá. Supongamos por ejemplo que deseamos tener una resolución



comparable a la de un monitor y para ello imaginamos una malla de  $1000 \times 1000$  *pixels* que contiene la sección del cuerpo humano que vamos a examinar (en [Ka-Sl] se apunta  $256 \times 256$  *pixels* como una resolución posible en la práctica, y por la imágenes allí mostradas  $128 \times 128$  pudiera ser a veces deficiente). Entonces habrá  $10^6$  incógnitas  $\rho_{ij}$  que calcular. El sistema lineal correspondiente tendrá una matriz de  $10^6 \times 10^6 = 10^{12}$  elementos lo cual podría causar algunos problemas de memoria en ordenadores convencionales si los tenemos que almacenar todos (necesitaríamos algo comparable a un *Terabyte* de memoria libre). Las estimaciones generales del número de operaciones para resolver un sistema lineal por eliminación de Gauss es del orden del cubo del número de variables, en nuestro caso  $10^{18}$ . A una velocidad de  $1\text{ GHz}$  esto llevaría del orden de 30 años (lo que no ayudaría mucho a reducir las listas de espera de la Seguridad Social).

Necesitamos, por tanto, un método maravilloso que requiera incomparablemente menos operaciones que el de Gauss. Quizá tal método no exista en general (si no se le ocurrió a Gauss...) pero aquí estamos considerando sistemas muy especiales y hay esperanzas sobre todo si nos contentamos con soluciones aproximadas. Nótese que típicamente un rayo atraviesa  $M$  *pixels*, con lo cual en cada ecuación sólo aparecen  $M$  incógnitas de las  $M^2$  que hay en total. Es decir, la matriz de coeficientes es muy dispersa, está llena de ceros.

Vamos a mostrar un método iterativo creado por S. Kaczmarz en 1937 que no altera la dispersión de la matriz, de hecho no modifica la matriz de coeficientes, lo que redundaría en que las operaciones sólo se hacen con los “pocos” coeficientes no nulos. La idea subyacente es la generalización a dimensiones mayores de un hecho muy sencillo: Podemos aproximar el punto donde se cortan dos rectas en  $\mathbb{R}^2$  partiendo de un punto cualquiera y proyectando alternativamente en cada una de las rectas.



**Teorema 3.1.** Sea un sistema compatible determinado de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas:

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{x} = b_1, \quad \vec{f}_2 \cdot \vec{x} = b_2, \quad \vec{f}_3 \cdot \vec{x} = b_3, \quad \dots \quad \vec{f}_N \cdot \vec{x} = b_N$$

con  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  el vector de incógnitas. Introduciendo las aplicaciones afines  $L_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  definidas como

$$L_i(\vec{x}) = P_i(\vec{x}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \quad \text{con} \quad P_i(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{f}_i \cdot \vec{x}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2},$$

se tiene que, para cualquier  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ , el algoritmo iterativo

$$\vec{x}_{n+1} = (L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

genera una sucesión que converge a la solución del sistema.

Nota: En nuestro caso cada  $\vec{f}_i$  sólo tiene  $M$  coordenadas no nulas y  $N = M^2$ ; así pues evaluar cada  $L_i$  requiere del orden de  $M$  operaciones y cada iteración completa algo comparable a  $M^3$ . Si  $M = 1000$ , mil millones de operaciones es algo asequible para un ordenador bien aprovechado. La rapidez de convergencia depende, en analogía con el caso bidimensional, de los ángulos entre los hiperplanos [**Sm-So-Wa**].

DEM.: Un poco de Álgebra Lineal prueba que  $P_i(\vec{v})$  es la proyección de  $\vec{v}$  sobre el hiperplano  $\vec{f}_i \cdot \vec{x} = 0$  (y  $L_i$  lo es sobre  $\vec{f}_i \cdot \vec{x} = b_i$ , [**Gr**] p.143). Por tanto  $\|P_1(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$  excepto si  $\vec{f}_1 \cdot \vec{v} = 0$  (si  $\vec{v}$  pertenece al hiperplano), en cuyo caso  $P_1(\vec{v}) = \vec{v}$ . De la misma forma,  $\|(P_2 \circ P_1)(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$  excepto si  $\vec{f}_1 \cdot \vec{v} = \vec{f}_2 \cdot \vec{v} = 0$ . Como el sistema es compatible determinado, la única solución de  $\vec{f}_1 \cdot \vec{v} = \vec{f}_2 \cdot \vec{v} = \dots = \vec{f}_N \cdot \vec{v} = 0$  es la trivial, con lo cual, repitiendo el argumento anterior, se concluye que  $\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_1)(\vec{v})\| \leq C\|\vec{v}\|$  para alguna constante  $C < 1$ . (Nótese que por la compacidad de la bola unidad, se tiene que  $\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_1)(\vec{v}/\|\vec{v}\|)\|$  alcanza un máximo, menor que 1, en  $\mathbb{R}^N - \{\vec{0}\}$ ).

Consideremos el operador  $Q = L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_1$ , entonces  $Q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  es una función contractiva ya que

$$\|Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\| = \|(L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_1)(\vec{x} - \vec{y})\| = \|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_1)(\vec{x} - \vec{y})\| \leq C\|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

El teorema de la aplicación contractiva (Cálculo Numérico I, Topología, Cálculo III) asegura que tiene un solo punto fijo que puede obtenerse como límite del algoritmo iterativo que se indica en el enunciado. Este punto fijo es la solución del sistema lineal, ya que es evidente que los  $L_i$  dejan invariante a dicha solución. ■

Epílogo: En la práctica, por razones de estabilidad, se utilizan más rayos que los  $N = M^2$  necesarios. De manera que se obtiene un sistema con más ecuaciones que incógnitas y que en general (por el más mínimo error de redondeo, experimental o del modelo) no es compatible determinado pero está “cerca” de serlo. Incluso en este caso, se aplica el algoritmo del teorema anterior, entendiendo los  $\vec{x}_n$  como soluciones aproximadas (por grande que sea  $n$ ). En [**Ka-SI**] §7 pueden consultarse algunas variantes del método y ejemplo prácticos de los resultados obtenidos con  $M = 128$ .

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Explicar el modelo de atenuación de los rayos X. b) Indicar la ecuación lineal para las densidades que corresponde a un rayo determinado por una recta  $L$ .

2) En el caso unidimensional estacionario, la ecuación del transporte dice que si un chorro de partículas se mueve a lo largo del eje  $X$  y la densidad de probabilidad de que una de ellas sea absorbida en el punto  $x$  es  $\sigma(x)$ , entonces se debe cumplir  $\phi'(x) = -\sigma(x)\phi$  donde  $\phi$  es la densidad de partículas del chorro. Explicar el significado de esta ecuación.

3) Si tuviéramos un sistema  $N \times N$  compatible indeterminado, ¿tiene sentido llevar a cabo la reconstrucción algebraica? Al menos intuitivamente, tratar de decidir si en este caso la sucesión  $\vec{x}_n$  converge.

4) Dado el sistema  $2x + y = 3$ ,  $x - 3y = -2$ ; partiendo de  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  calcular  $\vec{x}_1$  con el algoritmo de esta sección y comparar su valor con la solución real.

5) Verificar que  $x + 2y = 3$ ,  $2x - y = 1$ ,  $x - y = 0'01$ , es un sistema incompatible. Demostrar que  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \dots$  es una sucesión constante y comprobar que da una solución aproximada.

6) Supongamos una malla  $3 \times 3$  y que consideramos los tres rayos horizontales y los tres verticales que pasan por los centros de los cuadrados, y los tres oblicuos paralelos a  $y = x$  que pasan por los centros de todos los cuadrados excepto por los de las esquinas inferior derecha y superior izquierda. Comprobar que la reconstrucción algebraica no se puede llevar a cabo porque el determinante del sistema es nulo.

7) Demostrar que si  $A$  es una matriz  $N \times N$  con todos sus autovalores (reales y complejos) de módulo menor que 1, entonces para todo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  se cumple  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \vec{x} = \vec{0}$ .

8) El método iterativo de Jacobi para resolver el sistema compatible determinado  $A\vec{y} = \vec{b}$  viene dado por  $\vec{y}_{n+1} = (I - D^{-1}A)\vec{y}_n + D^{-1}\vec{b}$  donde  $D$  es la matriz diagonal cuyos elementos son los de la diagonal principal de  $A$ , que se suponen no nulos. Probar que converge a la solución del sistema para cualquier  $\vec{y}_0$  si los autovalores de  $I - D^{-1}A$  tienen módulo menor que 1.

9) Explicar por qué, en caso de que converja, el método anterior es muy útil para sistemas cuyas matrices son muy dispersas (pocos elementos no nulos). Demostrar que si  $\det(A) \neq 0$  siempre es posible reordenar las ecuaciones y las incógnitas de manera que los elementos de la diagonal sean no nulos.

10) Demostrar que en el caso de sistemas  $2 \times 2$  la constante  $C$  de contractividad de la aplicación  $Q$  en la prueba del teorema de esta sección es  $C = \cos \theta$  donde  $\theta$  es el ángulo entre las rectas que conforman el sistema.

11) Demostrar que si las filas  $\vec{f}_1 \vec{f}_2 \dots \vec{f}_N$  de un sistema  $N \times N$  son ortogonales (y no nulas), entonces  $\vec{x}_n$  es la solución exacta cualquiera que sea  $\vec{x}_0$  y  $n \geq 1$ .

## SECCIÓN 3.1

### **Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos** (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- Sistemas lineales con matrices dispersas. Métodos y aplicaciones.

#### Generales:

- Propagación de enfermedades y epidemias.
- Lógica difusa y sistemas expertos.

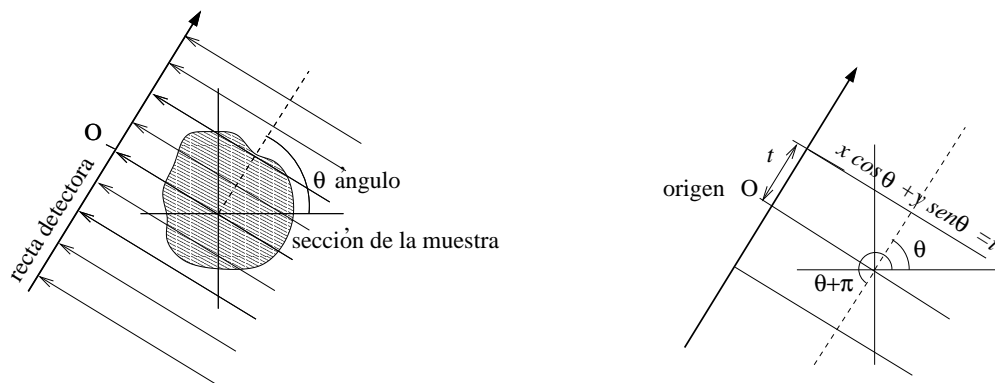
#### **Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*Habitados a contemplar lo infinitamente grande, nos hemos vuelto aptos para comprender lo infinitamente pequeño. Gracias a la educación que ha recibido, nuestra imaginación, como el ojo del águila que el Sol no deslumbra, puede mirar cara a cara a la verdad. [Po] p. 109.*

### 3.2. Segundo asalto

La reconstrucción algebraica vista en la sección anterior, a pesar de su sencillez, no es del todo satisfactoria en la práctica salvo en situaciones especiales [Ka-Sl] por su lentitud e imprecisión. Parte de esta imprecisión se debe a que desde el principio se discretiza (se digitaliza) mediante una malla que sólo simula bien los cambios continuos en la densidad cuando el sistema lineal asociado tiene dimensiones gigantescas. Para evitar esta situación, vamos a partir directamente de un modelo continuo, sin modificar la idea original de representar con una función  $\rho = \rho(x, y)$  la densidad (el tono de gris) en el punto  $(x, y)$  de la sección considerada. Por cierto, aunque no requiramos que  $\rho$  sea continua, el método de esta sección será más eficiente cuanto más regular sea  $\rho$ .

Supongamos que atravesamos la muestra con un haz paralelo de rayos X que se proyectan ortogonalmente sobre una recta exterior que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $OX$ .



Esta recta se puede identificar con la recta real  $\mathbb{R}$  y situar el origen en el punto de intersección con el rayo que pasa por  $(0, 0)$ . Un simple dibujo muestra que el rayo  $s_{\theta, t}$  que pasa por el punto  $t$  de esta recta tiene ecuación  $s_{\theta, t} \equiv x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta - t = 0$ . Como vimos en la sección anterior, la atenuación que ha experimentado el rayo cuando llega a  $t$  dependerá de la cantidad de masa que haya atravesado, es decir, de la integral de línea:

$$P_{\theta}(t) = \int_{s_{\theta, t}} \rho.$$

Notando que  $s_{\theta, t}$  y  $s_{\theta+\pi, -t}$  son rectas idénticas o simplemente imaginando la muestra rodeada de rectas detectoras con orientación compatible, se tiene  $P_{\theta}(t) = P_{\theta+\pi}(-t)$ .

El operador que asigna a una función escalar su integral de línea sobre cada recta es esencialmente lo que se llama *transformada de Radon* o, por razones obvias, *transformada de rayos X*. Para cada  $\theta$ , la función  $P_{\theta}(t)$  indica la “sombra” de la muestra, que es translúcida a los rayos X, sobre una pared que forma ángulo  $\theta$  con la horizontal. En 1917 J. Radon halló una fórmula [Sm-So-Wa] que permite recuperar la función original  $\rho$  a partir de todas sus sombras  $P_{\theta}(t)$ , lo cual tiene algunas consecuencias en las Matemáticas puras (por ejemplo permite deducir una fórmula de D’Alambert para la ecuación de ondas

en  $\mathbb{R}^3$  [Dy-Mc]). Pero hubo que esperar unos 60 años para que se convirtiera en un tema fundamental de las Matemáticas *aplicadas*.

Diccionario:

- Densidad de la sección de la muestra  $\longrightarrow \rho = \rho(x, y)$ .
- Haz de rayos perpendiculares al ángulo  $\theta \longrightarrow s_{\theta,t} \equiv x \cos \theta + y \sin \theta = t, t \in \mathbb{R}$ .
- $\log(I_0/I_f)$  para el rayo  $s_{\theta,t}$  del haz  $\longrightarrow P_\theta(t) = \int_{s_{\theta,t}} \rho \quad .$
- Simetría del haz  $\longrightarrow s_{\theta,t} = s_{\theta+\pi,-t}, P_\theta(t) = P_{\theta+\pi}(-t)$ .

El problema matemático al que nos enfrentamos es hallar una función conociendo sus integrales de línea en todas las direcciones. Con la notación anterior, lo que buscamos es una fórmula, como la de Radon, que permita recuperar  $\rho$  a partir de las funciones  $P_\theta(t)$ . Hay varias fórmulas equivalentes con este propósito [Ra-Ka] §2.2. Aquí veremos una que esencialmente es lo que se bautiza en la literatura tomográfica como *Fourier Slice Theorem* (teorema de las rebanadas de Fourier). Seguramente para muchos analistas de Fourier el nombre es desmesurado (hay una demostración de dos líneas en [Ra-Ka] si uno se atreve con las deltas de Dirac) porque refleja un hecho muy sencillo que ilustramos a continuación:

Si  $\theta = 0$  entonces  $P_\theta(t)$  no es más que la integral sobre la recta vertical  $x = t$ ,  $P_0(t) = \int \rho(t, u) du$ . Por la definición de la transformada de Fourier

$$\widehat{\rho}(\xi_1, 0) = \int \int \rho(t, u) e(-\xi_1 t - 0 u) dt du = \widehat{P}_0(\xi_1).$$

Por tanto la transformada de Fourier (bidimensional) de  $\rho$  evaluada en el eje  $X$  se puede hallar integrando  $\rho$  en la recta vertical  $s_{0,t}$  y después calculando la transformada de Fourier (unidimensional) de la función resultante. En Matemáticas y en Física las cosas no suelen cambiar mucho por girar la cabeza, de modo que  $\widehat{\rho}$  evaluada en una recta de ángulo  $\theta$  que pase por el origen debería coincidir siempre con  $\widehat{P}_\theta$ . Tomando transformadas inversas se puede despejar  $\rho$ .

**Teorema 3.2.** *Sea  $P_\theta(t)$  la integral de línea de  $\rho$  sobre la recta  $x \cos \theta + y \sin \theta = t$ , entonces para  $\rho$  suficientemente regular se tiene*

$$\rho(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |r| \widehat{P}_\theta(r) e(xr \cos \theta + yr \sin \theta) dr d\theta.$$

Nota: Lo de “suficientemente regular” es simplemente un requerimiento técnico para aplicar la fórmula de inversión. Con funciones de soporte compacto acotadas e integrables ya se tienen igualdades en casi todo punto, de modo que al menos desde el punto de vista teórico, no vamos a dejar de ver un tumor o cualquier cosa que tenga grosor porque  $\rho$  no sea  $C^\infty$ . Pero sí es cierto que en la práctica la falta de regularidad combinada con los métodos aproximados que se emplean, crea unas sombras inexistentes. El análogo de este fenómeno en las series de Fourier es el conocido fenómeno de Gibbs [Dy-Mc].

DEM.: Por la simetría  $\widehat{P}_\theta(r) = \widehat{P}_{\theta+\pi}(-r)$ , que se deduce de la análoga para  $P_\theta$ , la fórmula del teorema se puede escribir como

$$(3.2) \quad \rho(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{P}_\theta(r) e(xr \cos \theta + yr \sin \theta) dr d\theta.$$

De la fórmula de inversión,  $\rho(x, y) = \iint \widehat{\rho}(\xi_1, \xi_2) e(x\xi_1 + y\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$ , cambiando a coordenadas polares  $\xi_1 = r \cos \theta$ ,  $\xi_2 = r \sin \theta$ , se tiene

$$\rho(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{\rho}(r \cos \theta, r \sin \theta) e(xr \cos \theta + yr \sin \theta) dr d\theta.$$

Comparando con (3.2), basta probar que  $\widehat{P}_\theta(r) = \widehat{\rho}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Para ello considérese el giro de ángulo  $-\theta$  alrededor del origen,  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Según la Geometría I, en coordenadas cartesianas  $T$  es la función vectorial

$$T : (x, y) \mapsto (T_1(x, y), T_2(x, y)) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Es fácil ver (con un simple dibujo o en su defecto con un poco de Álgebra Lineal) que  $T$  transforma la recta  $s_{\theta,t}$  definida como antes, en la recta vertical  $x = t$  (con  $y = u$  arbitraria). De modo que cambiando la variable

$$P_\theta(t) = \int_{s_{\theta,t}} \rho = \int_{T s_{\theta,t}} \rho \circ T^{-1} = \int_{-\infty}^\infty (\rho \circ T^{-1})(t, u) du.$$

Por definición

$$\widehat{P}_\theta(r) = \int_{-\infty}^\infty \left( \int_{-\infty}^\infty (\rho \circ T^{-1})(t, u) du \right) e(-tr) dt = \int_{\mathbb{R}^2} (\rho \circ T^{-1})(t, u) e(-tr) dt du.$$

Y tras el cambio de variable  $(t, u) = (T_1(x, y), T_2(x, y))$  la última integral se transforma en  $\widehat{\rho}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ; lo que según habíamos visto, concluye la prueba. ■

Epílogo: Una vez conseguida una fórmula exacta que resuelve el problema, el matemático se puede ir a casa a hacer el cubo de Rubik, pero mientras se aleja el ingeniero protesta: “¿y ahora cómo meto yo esta fórmula en el ordenador?”; su trabajo todavía no ha terminado. El método natural para tratar numéricamente expresiones que involucren integrales o series de Fourier es la *transformada de Fourier rápida* [Ge], [Ta], más conocida por sus siglas en inglés FFT. Este método, combinado con el desarrollo de las computadoras, ha revolucionado muchos métodos numéricos en ingeniería desde su introducción en los años 60. Curiosamente, según parece Gauss ya lo conocía en una forma equivalente más de 150 años antes de su invención oficial [He-Jo-Bu].

Para no desviarnos demasiado, aquí mencionaremos algo un poco más directo, que es una versión simplificada y clarificada de §3.3.3 [Ka-Sl]. Escribiendo

$$\rho(x, y) = \int_0^\pi F(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad \text{con } F(\theta, u) = \int_{-\infty}^\infty |r| \widehat{P}_\theta(r) e(ru) dr,$$

todo el problema se reduce a saber aproximar  $F(\theta, u)$ , porque una vez hecho eso, podríamos pasarle al ingeniero nuestros apuntes de Cálculo Numérico I con un montón de métodos para aproximar integrales sobre el intervalo finito  $[0, \pi]$  (regla del trapecio, de Simpson, cuadratura de Gauss...). Por otra parte, seguro que sus apuntes son más gordos y completos que los nuestros.

Desarrollando por Fourier en  $[-1/2, 1/2]$  la función  $f(x) = |x|$ , [Gr-Ry] 1.444.6,

$$|x| = \sum_{n=-\infty}^\infty a_n e(n\pi x), \quad \text{con } a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}.$$

Sustituyendo  $x = rh$ , se tiene  $|r| = h^{-1} \sum a_n e(nhr)$  para  $r \in I = [-1/2h, 1/2h]$ . Si  $h$  es pequeño,  $I$  se parece a  $(-\infty, \infty)$  y se cumple

$$F(\theta, u) \approx \int_I |r| \widehat{P}_\theta(r) e(ru) dr = h^{-1} \sum a_n \int_I \widehat{P}_\theta(r) e((u + nh)r) dr.$$

La última integral extendida a  $\mathbb{R}$  es la transformada inversa de  $\widehat{P}_\theta(r)$ , por tanto

$$F(\theta, u) \approx h^{-1} \sum_{n=-\infty}^\infty a_n P_\theta(u + nh).$$

A esta fórmula no se le pueden poner pegatas: no hay ni transformadas de Fourier ni cosas raras, simplemente una suma que de hecho es finita porque  $P_\theta$  es de soporte compacto (la proyección ortogonal de un compacto es un compacto).



## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Indicar por qué  $P_\theta(t) = P_{\theta+\pi}(-t)$ . b) Demostrar la relación  $\widehat{\rho}(\xi, 0) = \widehat{P}_0(\xi)$

2) En la práctica, los detectores no son rectas, sino una circunferencia que rodea a la muestra. Halla la función que proyecta una circunferencia, digamos  $S^1$ , desde su centro sobre una recta tangente, digamos  $y = 1$ .

3) ¿Puede tener  $P_\theta(t)$  una discontinuidad de salto, para algún  $\theta$ ? En caso afirmativo dar un ejemplo y en caso negativo una demostración.

4) Se dice que una función  $f = f(\vec{x})$  es *radial*, si sólo depende del “radio”  $r = \|\vec{x}\|$ , esto es, si  $f(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)$  para alguna  $g$ . Explicar por qué si se sabe que la densidad es una función radial, entonces basta una proyección para reconstruirla.

5) Probar que si  $\rho$  es radial entonces  $\rho(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\pi |r| \widehat{P}_0(r) e(r \cos \theta \sqrt{x^2 + y^2}) d\theta dr$ . (La integral interior, de la forma  $\int_0^\pi e(\lambda \cos \theta) d\theta$ , es una de las llamadas *funciones de Bessel*, muy comunes en Física y Matemáticas).

6) Calcular  $P_\theta(t)$  para una muestra que esté confinada dentro de la circunferencia unidad y tal que  $1 - \rho$  sea en cada punto el cuadrado de la distancia al origen.

7) Hallar  $P_0(t)$  y  $\widehat{P}_0(t)$  para la muestra de densidad uno comprendida entre los cuadrados  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  y  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

8) Sea la muestra de densidad uno comprendida entre los cuadrados  $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \times [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$  y  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . Calcular  $\widehat{P}_{\pi/4}(t)$ .

9) Comprobar que el desarrollo de Fourier de la función 1–periódica que coincide con  $f(x) = |x|$  en  $[-1/2, 1/2]$  es el que se indica en esta sección, esto es, que los coeficientes de Fourier son  $a_0 = 1/4$  y  $a_n = ((-1)^n - 1)/(2\pi^2 n^2)$  para  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .

10) Demostrar que si  $A$  es una matriz no singular, la transformada de Fourier de  $f(A^t \vec{x})$  es  $\widehat{f}(A^{-1} \vec{\xi})/\det(A)$ . Tratar de deducir del caso en que  $A$  represente un giro, que la transformada de Fourier de una función radial es también radial. (Recuérdese que las matriz de un giro es ortogonal y por tanto  $A \cdot A^t = I$ ).

11) Probar rigurosamente  $\rho(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^\pi P_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta + nh) d\theta$  para cualquier  $\rho \in C_0^3(\mathbb{R}^2)$ . (Comenzar demostrando, integrando por partes, que  $|r|^3 \widehat{P}_\theta(r)$  está acotada).

## SECCIÓN 3.2

**Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos** (el precio de esta fotocopia)De la sección:

- Principios de Resonancia Magnética Nuclear.

Generales:

- Uso de la Estadística en ensayos clínicos y diseño de experimentos.
- El cubo de Rubik y otros rompecabezas similares.

**Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*Los hombres más desdeñosos de la teoría, sin duda encuentran en ella un alimento cotidiano. Si se les privara de ese alimento, el progreso se detendría y pronto nos estancaríamos en la inmovilidad de China. [Po] p. 93.*

## Su luz puede valer

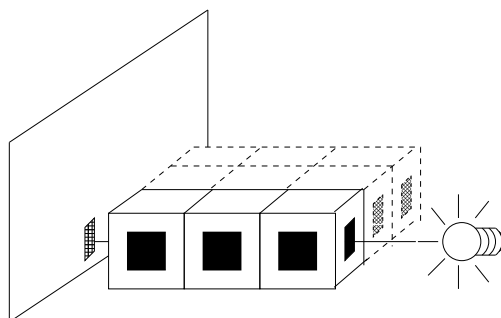
### Material:

- Cartulina.
- Plástico semitransparente (por ejemplo de una bolsa).
- Una linterna.
- Una calculadora.

Como es una verdad universal que ni la carne de burro ni la nuestra se transparentan, no podemos cambiar los rayos X por rayos de luz visible en las aplicaciones médicas (o veterinarias). Lo que vamos a hacer aquí es sustituir los tejidos por unos burdos cubitos translúcidos con los que podamos ilustrar la reconstrucción algebraica.

El experimento en sí es bastante tonto (el próximo es mucho mejor) y quizá sólo sirva para reciclar una briznita de [Ch], de donde está tomado.

Con la cartulina fabricaremos nueve cubos y en sus caras laterales abriremos “ventanas” para que pueda pasar la luz, las cuales cubriremos en algunos de ellos con el plástico semitransparente\*. Al poner tres cubos seguidos y enfocarlos con la luz de la linterna, se pueden detectar en una pantalla (una hoja de papel) cuatro posibles intensidades dependiendo de si ninguno, uno, dos o los tres cubos tienen plástico en sus ventanas.

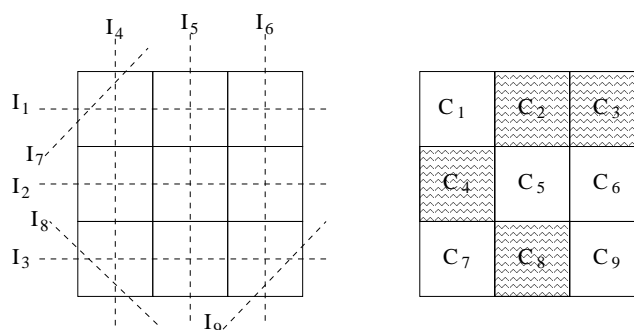


Convencionalmente designaremos estas intensidades por  $I = 1, 1/2, 1/3, 1/4$  respectivamente. Para llevar a cabo el experimento, es importante familiarizarse con ellas de manera que podamos distinguirlas a simple vista. En otro caso, debemos cambiar el tipo de plástico.

---

\* *N. del A.* Construí los cubos de 4 cm de arista y las ventanas de 2×2. Como plástico semitransparente utilicé el de una bolsa blanca de las que dan en los supermercados. Tiene el inconveniente de que difunde la luz porque no queda totalmente lisa, pero en cuanto a transparencia es muy aceptable. Quizá el papel de celofán de colores también sea adecuado.

Dispongamos los cubos formando un cuadrado (si queremos darle emoción y aguantar las burlas, podemos pedirle a alguien que lo haga por nosotros y que tape el resultado con un folio por encima). Dirigiendo la linterna en las tres direcciones horizontales, en las tres verticales y en las oblicuas correspondientes a tres de las cuatro esquinas, tendremos una relación entre el número de cubos semitransparentes en las secciones consideradas y las intensidades registradas.



Supongamos que numeramos los cubos como en la figura y asignamos al cubo  $i$ -ésimo el valor  $C_i = 0$  si está hueco y  $C_i = 1$  si es semitransparente. Entonces se tienen las relaciones

$$(3.3) \quad \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= I_1^{-1} - 1 & C_1 + C_4 + C_7 &= I_4^{-1} - 1 \\ C_4 + C_5 + C_6 &= I_2^{-1} - 1 & C_2 + C_5 + C_8 &= I_5^{-1} - 1 \\ C_7 + C_8 + C_9 &= I_3^{-1} - 1 & C_3 + C_6 + C_9 &= I_6^{-1} - 1 \\ C_1 &= I_7^{-1} - 1, & C_7 &= I_8^{-1} - 1, & C_9 &= I_9^{-1} - 1 \end{aligned}$$

En el caso de la figura, habríamos obtenido el vector de intensidades

$$\vec{I} = (I_1, \dots, I_9) = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right).$$

Lo que da lugar a un sistema de nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Se puede comprobar que (si no usamos que  $C_i \in \{0, 1\}$ ) dicho sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado. Añadiendo una nueva relación: la intensidad  $I_{10} = 1/2$  que pasa por la esquina  $C_3$ , obtenemos finalmente un sistema determinado. Evidentemente si en vez de nueve celdillas tuviéramos miles, esto sería muy costoso de comprobar, y en la práctica simplemente añadiríamos más ecuaciones de las necesarias, pensando que habría que tener muy mala suerte para que todavía el rango de la matriz no fuera el adecuado.

El sistema se resuelve directamente previo pago de hacer unas cuentas, y la solución es  $\vec{C} = (C_1, \dots, C_9) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ . Pero como queremos ilustrar la reconstrucción

algebraica, usaremos el algoritmo correspondiente

$$\vec{x}_{n+1} = (L_{10} \circ L_9 \circ \dots \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

partiendo de  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ . Donde  $L_i$  son las proyecciones en los hiperplanos que definen las ecuaciones de (3.3) y la añadida después (de hecho podríamos reemplazar una de las ecuaciones por ella). Con una calculadora y un poco de paciencia, se pueden hacer una o dos iteraciones. Con un pequeño programilla se puede ir más allá. Por ejemplo, algunos de los  $\vec{x}_n$  obtenidos de esta forma son:

$$\vec{x}_5 = (0, 0'8595, 1, 0'7278, 0'3468, -0'0746, 0, 0'7937, 0)$$

$$\vec{x}_{10} = (0, 0'9081, 1, 0'8908, 0'1925, -0'0832, 0, 0'8994, 0)$$

$$\vec{x}_{15} = (0, 0'9472, 1, 0'9449, 0'1068, -0'0517, 0, 0'9460, 0)$$

$$\vec{x}_{20} = (0, 0'9704, 1, 0'9701, 0'0593, -0'0294, 0, 0'9703, 0)$$

$$\vec{x}_{25} = (0, 0'9836, 1, 0'9835, 0'0329, -0'0164, 0, 0'9835, 0)$$

Nótese que la aproximación de  $\vec{x}_n$  a la solución hace posible adivinar enseguida dónde están los cubos semitransparentes ( $C_i = 1$ ) y los huecos ( $C_i = 0$ ). En el límite  $\vec{x}_n \rightarrow \vec{C}$ .

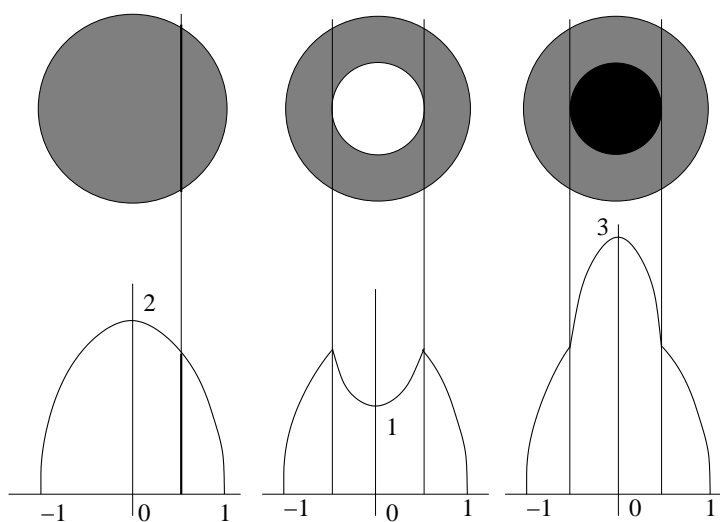


## Pinta el tubo

**Material:**

- Una calculadora programable o un ordenador con un programa de cálculo.
- Un programa para dibujar gráficas (opcional).

Tampoco es plan que vayamos por las tiendas pidiendo una máquina de rayos X para comprobar si verdaderamente podemos recuperar con el método indicado  $\rho$  a partir de las radiografías  $P_\theta$ . Por eso vamos a considerar secciones muy particulares, con simetría radial, de las que nosotros mismos podemos hallar la sombra *a mano*. Para fijar el contexto en el que trabajamos, imaginemos que tenemos unos tubos con simetría radial acotados por  $S^1 \times \mathbb{R}$  y queremos saber, sin romperlos, si son macizos, si tienen una parte hueca, o si tienen un alma (zona central) de mayor densidad. Consideremos justamente tres tubos que respondan a estas características: Uno macizo de radio 1 y densidad 1, otro igual que el anterior pero con la zona central  $0 \leq r \leq 1/2$  hueca, y un tercero con esta zona central rellena de un material de densidad 2. Por la simetría radial, la función “sombra”  $S(t) = P_\theta(t)$  no dependerá del ángulo  $\theta$  y podemos calcularla fácilmente.



$$S_1(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}, \quad S_2(x) = S_1(x) - \frac{1}{2}S_1(2x), \quad S_3(x) = S_1(x) + \frac{1}{2}S_1(2x)$$

Esto es lo que podríamos haber deducido si hubiéramos podido hacer el experimento con rayos X. Lo ideal, pero utópico, es que convenciéramos a un amigo (al menos hasta antes de pedírselo) para que se inventara una estructura interna de un tubo, siempre con simetría radial y sección dentro del círculo unidad, e hiciera los cálculos mostrándonos la ecuación de la función sombra  $S = S(x)$ . El experimento consistirá en que haciendo trabajar a la calculadora o al ordenador, podremos adivinar la estructura del tubo a partir de la función  $S$ .

Exactamente, lo que tenemos que hacer es fijar una *precisión*  $h$  pequeña (aunque si lo es demasiado nos aburriríamos antes de que se terminen los cálculos y quizá se acumulen los errores de redondeo) y hacer un programilla que para cada coordenada radial  $R$  calcule

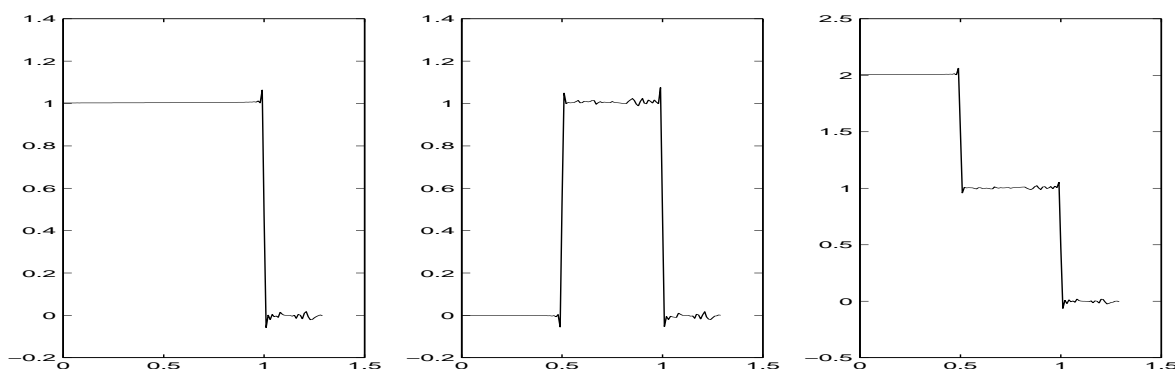
$$D(R) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\theta_j} \left( \frac{\pi^2}{8} S(R \cos \theta_j) - \sum_{1 \leq k < h^{-1}} \frac{1}{(2k+1)^2} S(R \cos \theta_j + (2k+1)h) \right)$$

donde los  $\theta_j$  recorren  $[0, \pi]$  de  $h$  en  $h$ , esto es,  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = h$ ,  $\theta_2 = 2h$ , etc. Prácticamente en cualquier lenguaje que usemos, programar esta fórmula no requerirá más que un par de bucles, y un tercero para que nos muestre una lista de  $D(R)$  para diferentes valores de  $R$ .

La exactitud que se logra al aproximar la densidad en  $\|\vec{x}\| = R$  por  $D(R)$  es difícil de creer. Por ejemplo, tomando  $h = 0'01^*$ , se obtuvieron los siguientes resultados (se indican entre paréntesis los valores exactos):

	<b>Tubo 1</b>	<b>Tubo 2</b>	<b>Tubo 3</b>
$R = 0$	1'0025 ( $\rho = 1$ )	0'0003 ( $\rho = 0$ )	2'0048 ( $\rho = 2$ )
$R = 0'25$	1'0032 ( $\rho = 1$ )	-0'0005 ( $\rho = 0$ )	2'0070 ( $\rho = 2$ )
$R = 0'75$	1'0049 ( $\rho = 1$ )	1'0057 ( $\rho = 1$ )	1'0041 ( $\rho = 1$ )

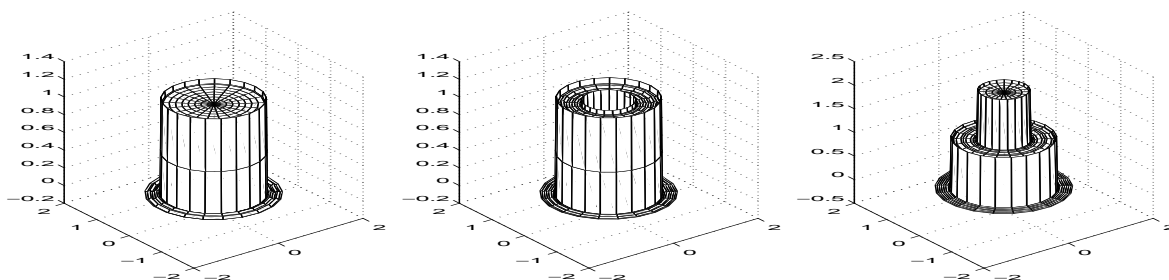
Ya puestos, podemos representar la gráfica de  $D(R)$  en cada caso. Como era de esperar, los errores mayores se producen cerca de las discontinuidades de la densidad.



\* *N. del A.* Utilicé un sencillo programa FORTRAN trabajando en precisión simple.



Y si nos apetece radializar estas gráficas podemos obtener superficies en  $\mathbb{R}^3$ , que no dan más información, pero quedan bonitas.



El problema de reconstruir conjuntos tridimensionales con simetría esférica a partir de fotografías (o radiografías) tiene una posible aplicación práctica en el estudio de la densidad de las galaxias globulares a partir de las imágenes obtenidas con un telescopio [Gr] p. 164.

Explicación: El algoritmo que hemos usado no tiene ningún misterio. Según lo visto en la última sección,

$$\rho(x, 0) = \int_0^\pi F(x \cos \theta) \quad \text{con} \quad F(u) \approx h^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n S(u + nh)$$

con  $a_n = 0$  para los pares, excepto  $a_0 = 1/4$ , y  $a_n = -1/\pi^2 n^2$  para los impares. Por la regla del trapecio (Cálculo Numérico I)

$$\rho(R, 0) \approx h \sum_{\theta_j} F(R \cos \theta_j),$$

y por las simetrías  $a_n = a_{-n}$  y  $S(u) = S(-u)$ , se tiene

$$F(u) \approx h^{-1} \left( \frac{1}{4} S(u) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n S(u + nh) \right),$$

que sustituyendo  $n = 2k + 1$ ,  $a_{2k+1} = -1/(\pi(2k + 1))^2$ , y empleando que  $\text{sup } S \subset [-1, 1]$ , lleva a la fórmula para  $D(R)$  que aproxima a  $\rho(R, 0)$ .

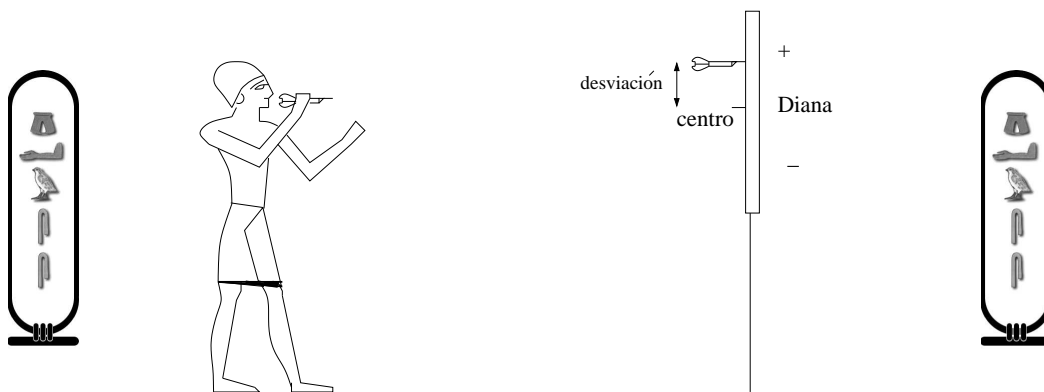


## 4. Modelos probabilísticos

### 4.1. Una central

El siguiente modelo se ha mencionado seguramente en Probabilidad I y se ve con detalle en Probabilidad II, pero es tan importante e interesante que no está de más insistir aquí. Con él podremos explicar por qué la normal de Gauss es una distribución central en las aplicaciones prácticas de la Estadística.

La situación que vamos a analizar es bastante genérica: digamos que hacemos un experimento en el que obtenemos una medición que en condiciones ideales es exacta, pero que en la práctica está alterada por una cantidad ingente de errores incontrolables. No hace falta ponerse muy serios, vestirse con bata blanca y pensar en un laboratorio lleno de matraces, basta imaginar algo tan lúdico como tirar dardo a una diana e intentar atinar en el centro. Aunque siempre apuntemos hacia él, con suerte lo más que conseguimos es quedarnos más o menos cerca. Si para fijar ideas y no complicarnos la vida desde el principio, suponemos vivir en planilandia o en un relieve del antiguo Egipto, de modo que la superficie de la diana sea unidimensional; se puede considerar que la desviación viene dada por un número real que indica la distancia con signo al origen (arriba +, abajo -). Ése es el número que medimos.



¿Por qué dicho número no es cero?, o lo que es lo mismo, ¿por qué no acertamos? Le podemos echar la culpa a muchas cosas y estaremos en lo cierto. Aquí y en otros experimentos es natural suponer que hay un montón de factores, digamos  $N$  con  $N \rightarrow \infty$ , que contribuyen a provocar una desviación infinitesimal. No podemos explicar biológica ni físicamente cómo nos va a fallar el pulso y es más fácil echarle la culpa a muchos factores biológicos o físicos que no sabemos controlar. Matemáticamente los representaremos por variables aleatorias  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  que supondremos uniformemente distribuidas en  $[-\epsilon, \epsilon]$  con  $\epsilon$  muy pequeño (más adelante veremos que esta hipótesis se puede rebajar mucho).

También supondremos que todos estos factores no están relacionados, es decir, las  $\xi_i$  son variables aleatorias independientes. Nuestra intención es dar en el blanco, pero por la influencia de todas las perturbaciones (la “mala suerte”), los errores se acumulan haciendo que la posición final en la diana del dardo que hemos lanzado sea la variable aleatoria  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  de esperanza nula (es igual de fácil desviarse arriba o abajo) y varianza  $\sigma^2$  que podemos hallar experimentalmente.

Diccionario:

- Factores de error (muchos)  $\longrightarrow$  Variables aleatorias  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  con  $N \rightarrow \infty$ ,  
y  $\xi_i \sim U([- \epsilon, \epsilon])$ .
- No relacionados  $\longrightarrow \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  independientes.
- Desviación = suma de errores  $\longrightarrow \xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  con  $E(\xi) = 0$ ,  $V(\xi) = \sigma^2$ .

Ahora podemos plantear el problema de encontrar la distribución de  $\xi$  en estas condiciones cuando  $N \rightarrow \infty$ . Si tal distribución límite existe debe aparecer muchas veces en el *mundo real*, siempre que haya una acumulación de errores incontrolables como los indicados. Antes de seguir, nótese que por la fórmula para la varianza de la suma de variables aleatorias independientes

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_N^2 = \frac{N}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x^2 dx = \frac{1}{3} N \epsilon^2.$$

De modo que dados  $\sigma$  y  $N$  el valor de  $\epsilon$  queda unívocamente determinado por  $\epsilon = \sigma \sqrt{3/N}$ .

Si llamamos  $f$  a la función de densidad de  $\xi_i$ , es decir,  $f(x) = (2\epsilon)^{-1}$  si  $|x| \leq \epsilon$ , y  $f(x) = 0$  en otro caso; la función de densidad de  $\xi_1 + \xi_2$  será para cada  $x$  la integral de  $f(x_1)f(x_2)$  sobre los valores que verifican  $x_1 + x_2 = x$ . Esto es,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x - x_1) dx_1 = (f * f)(x).$$

La última igualdad es sólo notación. Es decir, en general se define la *convolución*  $a * b$  de  $a = a(x)$  y  $b = b(x)$  como  $\int_{-\infty}^{\infty} a(t)b(x - t) dt$ . Análogamente, la función de densidad de  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  vendrá dada por la fórmula:

$$g_N(x) = (f * \overset{N \text{ veces}}{\dots} * f)(x).$$

Lo que queremos ver es que  $g_N$  se acerca a “algo”. Eso es lo que indica el siguiente

teorema, que es una versión en pequeño del teorema central del límite [Fe] VIII.4.

**Teorema 4.1.** Sea  $\sigma > 0$  y  $f$  como antes con  $\epsilon = \sigma\sqrt{3/N}$ , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

Aquí vemos aparecer mágicamente la famosísima campana de Gauss, que es familiar para cualquiera que haya seguido un curso básico de Estadística (en Alemania ni siquiera se exigía este requisito, porque la campana, su ecuación y su autor, aparecían en los antiguos billetes de diez marcos).

DEM.: De la definición de la transformada de Fourier, es fácil deducir que  $\widehat{a * b} = \widehat{a} \widehat{b}$ , y un cálculo muestra  $\widehat{f}(t) = \text{sen}(2\pi\epsilon t)/(2\pi\epsilon t)$ . Por tanto

$$g_N = f * \overset{N \text{ veces}}{\dots} * f \Rightarrow \widehat{g}_N(t) = (\widehat{f}(t))^N = \frac{\text{sen}^N(2\pi\epsilon t)}{(2\pi\epsilon t)^N}.$$

Como  $g_N$  es de soporte compacto y suficientemente regular cuando  $N$  es grande, se puede aplicar la fórmula de inversión, obteniéndose

$$g_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^N(2\pi\epsilon t)}{(2\pi\epsilon t)^N} e(tx) dt = I_1 + I_2,$$

donde  $I_1$  es el valor de la integral sobre  $A = [-(2\pi\epsilon)^{-1}, (2\pi\epsilon)^{-1}]$  e  $I_2$  sobre su complementario  $\mathbb{R} - A$ . Obviamente  $|I_2| \leq 2 \int_{(2\pi\epsilon)^{-1}}^{\infty} (2\pi\epsilon t)^{-N} dt = (\pi(N-1)\sigma)^{-1} \sqrt{N/3}$  que tiende a cero con  $N$ . De hecho se podría comprobar que el decaimiento de  $|I_2|$  es exponencial. Sea  $h_N(u) = (u - u^3/6)^{-N} \text{sen}^N u$ , entonces

$$I_1 = \int_A (1 - (2\pi\epsilon t)^2/6)^N h_N(2\pi\epsilon t) e(tx) dt.$$

Sustituyendo  $\epsilon = \sigma\sqrt{3/N}$ , se tiene que para cada  $t$  fijado

$$\left(1 - \frac{(2\pi\epsilon t)^2}{6}\right)^N = \left(1 - \frac{2\pi^2\sigma^2 t^2}{N}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}.$$

Por otra parte  $|h_N| < 1$  y no es difícil ver que por ejemplo para  $|t| < N^{0'1}$ ,  $h_N(2\pi\epsilon t) \rightarrow 1$ . Usando los teoremas habituales (convergencia dominada, convergencia uniforme), queda justificado introducir en  $I_1$  el límite bajo el signo integral, obteniéndose [Gr-Ry] 17.23.13

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2} e(tx) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

Como se quería demostrar. ■

La consecuencia de este resultado es que típicamente en la práctica el error viene dado por una variable aleatoria  $\xi$  de media cero y desviación típica  $\sigma$ , de forma que

$$\text{Prob}(\xi > \sigma X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma X}^{\infty} e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_X^{\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Esta última función, llamada  $\text{Erfc}(X)$ , se puede aproximar de diferentes formas y aparece en las tablas estadísticas. Algunos valores (redondeados hasta cuatro decimales) útiles para los ejercicios de la sección son  $\text{Erfc}(0'1) = 0'4602$ ,  $\text{Erfc}(0'4630) = 0'3217$ ,  $\text{Erfc}(0'6481) = 0'2585$ ,  $\text{Erfc}(1) = 0'1587$ .

Epílogo: Dadas  $N$  variables aleatorias  $\eta_i$  equidistribuidas e independientes de media  $\bar{\eta}$  y varianza  $\sigma$ , se puede considerar que  $\xi_i = (\eta_i - \bar{\eta})/(\sigma\sqrt{N})$  son pequeños errores, además  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_N$  cumple  $E(\xi) = 0$  y  $V(\xi) = 1$ . Si confiamos que el teorema central del límite es aplicable, para cada  $X$  se tiene

$$(4.1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}((\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_N - N\bar{\eta})/(\sigma\sqrt{N}) > X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_X^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \text{Erfc}(X).$$

En el caso de variables continuas, sea cual sea la función de densidad  $f$  de  $\xi_i$ ,  $E(\xi_i) = \int f = 0$  y  $V(\xi_i) = \int x^2 f = 1/N$  implican por Taylor que  $\hat{f}(t) \approx 1 - (2\pi t/\sqrt{N})^2$  para  $t$  “pequeño”. Y esto, con una leve condición de regularidad para que  $I_2 \rightarrow 0$ , permite copiar la demostración del teorema y dar una prueba rigurosa de (4.1). En definitiva, una vez normalizados los errores infinitesimales, da igual la distribución que tengan, siempre se llega a una normal [**Ze-Ra-So**]. En el caso de variables discretas, (4.1) sigue siendo cierto, pero hay que tratar con funciones de distribución o con probabilidades en vez de con funciones de densidad, que en este caso no existen.

Como se ha indicado, para las variables continuas en principio se necesita un mínimo de regularidad que asegure el decaimiento de la transformada de Fourier, pero esto es gratis con algunos trucos sucios del análisis [**Dy-Mc**] §2.7. Uno siempre puede huir de todos estos tecnicismos cayendo en otros que no requieren en absoluto la transformada de Fourier, como se muestra en [**Fe**] VIII.4.

Quien desee conocer con rigor muchas de las variantes que conducen a la ubicua campana de Gauss, que mire con cuidado todos los teoremas del curso de Probabilidad II que terminan diciendo “converge ... a una distribución normal” [**Fe**], [**Ko**].

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Hallar la varianza de  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  con  $\xi_i$  independientes y uniformemente distribuidas en  $[-\epsilon, \epsilon]$ . b) Indicar por qué se pide la independencia de las variables en el modelo estudiado.

2) En Estadística I se prueba que la suma de dos variables aleatorias independientes con una distribución normal también tiene una distribución normal. Explicar este hecho interpretando las normales como acumulación de errores infinitesimales independientes.

3) Se dice que una señal recibida tiene *ruido gaussiano* si la diferencia con la señal emitida se comporta como una variable aleatoria con distribución normal de media cero y varianza típicamente pequeña. Y se dice que tiene *ruido de sal y pimienta* (*salt & pepper noise*) si la diferencia es nula salvo en cierta proporción típicamente pequeña de puntos, en los que se comporta como una distribución uniforme en cierto intervalo no necesariamente pequeño. Explicar por qué el primer tipo de ruido es el habitual en las transmisiones analógicas y el segundo en las digitales.

4) Sean  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{10}$  las variables aleatorias que dan las sucesivas puntuaciones de un dado al lanzarlo diez veces. La probabilidad de que la suma de puntuaciones sea 32 se puede escribir evidentemente como  $\text{Prob}(31'5 \leq \eta_1 + \dots + \eta_{10} < 32'5)$ . A partir de esta expresión y aplicando el teorema central del límite a  $\xi_1 + \dots + \xi_{10}$  con  $\xi_i = (\eta_i - 3'5)\sqrt{6/175}$ , aproximar dicha probabilidad (y compararla con el valor exacto  $3801535/60466176$ ).

5) Aproximar la probabilidad de que al tirar una moneda un millón de veces, la diferencia entre el número de caras y de cruces sea mayor que mil.

6) Si al tirar dardos en una diana apuntando al centro, la desviación típica es  $\sigma = 5 \text{ cm}$ , calcular la probabilidad de acertar en el círculo central que tiene un radio de  $0'5 \text{ cm}$ .

7) Con los datos del problema anterior hallar la probabilidad de acertar al menos una vez tras cinco intentos.

8) Dada  $f(x) = e^{x^{-2}} \int_0^x u^{-2} e^{-u^{-2}} du \in C^\infty$ , hallar su polinomio de Taylor de grado tres alrededor de cero (puede ser útil notar que  $x^3 f'(x) + 2f(x) = x$ ). Con el cambio  $t = \sqrt{2}/u$ , deducir la aproximación  $\text{Erfc}(x) \approx e^{-x^2/2}(x^{-1} - x^{-3})/\sqrt{2\pi}$  para  $x$  grande.

9) Demostrar que si  $f$  y  $g$  son suficientemente regulares  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ .

10) Sea  $f$  la función que vale uno en  $[-1/2, 1/2]$  y cero en el resto. Hallar explícitamente  $f * f * f$  como función definida a trozos, y comparar su gráfica con la de  $e^{-2x^2} \sqrt{2/\pi}$  explicando la similitud.

11) Hallar la función de densidad en coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  cuando se apunta al centro de una diana ilimitada (que se supone  $\mathbb{R}^2$ ) con varianza  $\sigma^2 = 1/2$ . Esto es, la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que la probabilidad de que un dardo caiga en  $A \subset \mathbb{R}^2$  sea  $\int_A f(x, y) dx dy$ .

## SECCIÓN 4.1

### Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- El teorema ergódico y sus aplicaciones.
- Interpretación de Copenhague de la Mecánica Cuántica.

#### Generales:

- Teoría de Juegos y sus aplicaciones.

### Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

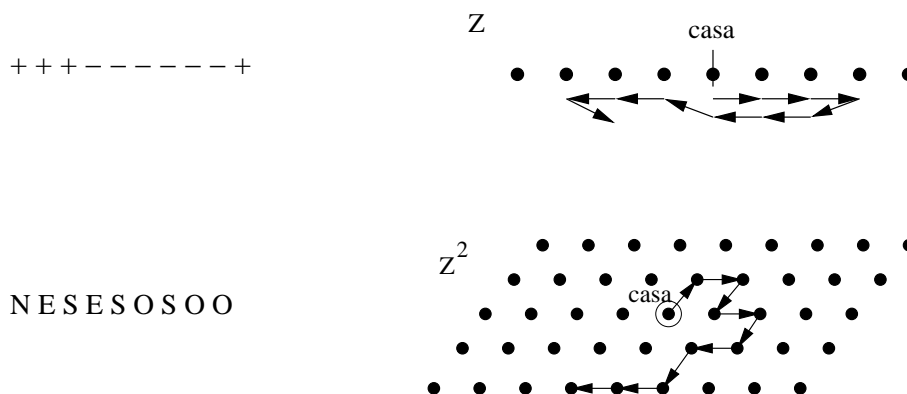
*Aun más, cuando realizo una experiencia debo hacer algunas correcciones en el resultado, porque sé que he debido cometer errores. Estos errores son de dos clases: unos son accidentales y los corregiré tomando el valor medio, otros son sistemáticos y no podré corregirlos más que por un estudio profundo de sus causas. [Po] p. 143.*



## 4.2. Simple visitante

Un aburrido domingo salimos de casa, y en nuestra indecisión lanzamos una moneda para saber si vamos hacia la derecha o hacia la izquierda. Después del primer paso repetimos el procedimiento, y así sucesivamente. La pregunta que se plantea es si es probable que en un largo paseo aleatorio de estas características volvamos muchas veces a casa. Recordando a nuestra hermana menor, la Modelización I, esto es algo muy parecido a las cadenas de Markov allí estudiadas, pero la gran diferencia es que esta vez los pasos se dan sobre un conjunto discreto infinito, digamos  $\mathbb{Z}$  (puede que el mundo sea redondo, pero nos moriremos de viejos, de dolor de pies, o nos ahogaremos, antes de que demos la vuelta completa; por lo que es natural considerar un conjunto infinito). Se puede representar convencionalmente cada paso a la derecha con un signo “+” y cada paso a la izquierda con un signo “-”, lo que corresponde a sumar o sustraer una unidad en  $\mathbb{Z}$ . De este modo, un paseo es un conjunto ordenado de mases y menos.

En dos dimensiones la situación es análoga, pero ahora hay que considerar  $\mathbb{Z}^2$  y podemos dar pasos en las direcciones norte  $N$ , sur  $S$ , este  $E$  y oeste  $O$ . De modo que un paseo queda representado como una tira con estos símbolos.



En general, en dimensión  $D$  se consideran  $2D$  símbolos indicando los  $2D$  posibles sentidos en  $\mathbb{Z}^D$  y las listas formadas con ellos corresponden a paseos aleatorios en  $\mathbb{Z}^D$ .

Sea  $N_n$  el número de paseos aleatorios de  $n$  pasos que terminan en el punto de partida (en el origen, en casa). Evidentemente hay  $(2D)^M$  posibles paseos de  $M$  pasos en  $\mathbb{Z}^D$  y  $N_n(2D)^{M-n}$  de ellos pasarán por casa exactamente en el paso  $n$ -ésimo, de modo que el número medio de visitas a casa de un camino aleatorio de  $M$  pasos es

$$(2D)^{-M} (N_1(2D)^{M-1} + N_2(2D)^{M-2} + \dots + N_M(2D)^0) = \sum_{n=1}^M (2D)^{-n} N_n.$$

Para  $D = 1$ ,  $N_n$  no es más que el número de listas ordenadas de longitud  $n$  e igual número de mases que de menos; análogamente para  $D = 2$ , debe haber igual número de enes que de eses y de es que de oes, para así poder acabar en el origen. En general  $N_n = 0$  si  $n$  es impar, y con el lenguaje de la combinatoria  $N_n$  no es más que el número total de permutaciones con repetición de  $2D$  símbolos tomados de  $n$  en  $n$ , de manera que el número de repeticiones de los símbolos sea igual por parejas.

Diccionario:

- Paseos aleatorios en  $\mathbb{Z}^D \rightarrow$  Listas ordenadas formadas con  $2D$  símbolos.
- Número de paseos que después de  $n$  pasos  $\rightarrow$  Número total de permutaciones con vuelven a casa. repetición de  $2D$  símbolos tomados de  $n$  en  $n$  con repeticiones iguales dos a dos.
- Número medio de vueltas a casa  $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2D)^{-n} N_n$ .

La fórmula para las permutaciones con repetición de  $2D$  símbolos con  $r_1 + r_2 + \dots + r_{2D} = n$  repeticiones es

$$PR_{r_1, r_2, \dots, r_{2D}}^n = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_{2D}!}.$$

(Hay  $n!$  formas de permutar  $n$  elementos distintos, si  $r_1$  de los elementos son iguales se reducen a  $n!/r_1!$ , si otros  $r_2$  son iguales, a  $n!/(r_1! r_2!)$ , etc.). Por consiguiente

$$(4.2) \quad N_n = \sum_{2k_1 + 2k_2 + \dots + 2k_D = n} \frac{n!}{(k_1!)^2 (k_2!)^2 \dots (k_D!)^2}.$$

El sorprendente resultado debido a Pólya es que  $\sum (2D)^{-n} N_n$  diverge si y sólo si  $D = 1, 2$ . Es decir, que para dimensión uno o dos, en media se vuelve a casa infinitas veces, mientras que en dimensiones mayores sólo un número finito. Un curioso efecto de la dimensión sobre los paseos aleatorios.

**Teorema 4.2.** *La serie  $\sum (2D)^{-n} N_n$  diverge para  $D = 1$  y  $D = 2$ , y converge para  $D \geq 3$ . De hecho en este caso se tiene la fórmula:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2D)^{-n} N_n = -1 + \frac{D}{2\pi^D} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left( \sin^2 \frac{u_1}{2} + \sin^2 \frac{u_2}{2} + \dots + \sin^2 \frac{u_D}{2} \right)^{-1} du_1 \dots du_D.$$

En la demostración se necesitará evaluar una integral suficientemente sencilla e ingeniosa como para que hagamos el cálculo aparte.

**Lema 4.3.** *Sea  $m$  un entero no negativo, entonces*

$$\int_{-1}^1 \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar} \\ 2^{-2k} \pi (2k)! / (k!)^2 & \text{si } m = 2k \end{cases}$$

DEM.: Para  $m$  impar el resultado es trivial porque el integrando es una función impar. Si  $m = 2k$ , con el cambio  $x = \cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$  se sigue

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2k} t dt = 2^{-2k-1} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(2k-2j)it} dt.$$

Y basta notar que la última integral es nula excepto si  $j = k$ . ■

DEM.(del teorema): Al igual que los números combinatorios vienen generados por la potencia de un binomio, las permutaciones con repetición lo están por la de un multinomio. Concretamente

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_D)^n = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_D=n} \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_D!} x^{m_1} x^{m_2} \dots x^{m_D}.$$

La suma de los coeficientes tiene un aspecto similar a la fórmula (4.2) para  $N_n$ , pero a fin de que coincida exactamente hay que reemplazar cada  $m_i!$  por  $(k_i!)^2$  con  $m_i = 2k_i$ . Esto se consigue gracias al lema, que a través de (4.2) y la fórmula anterior, implica

$$N_n = \frac{2^n}{\pi^D} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_D)^n}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)\dots(1-x_D^2)}} dx_1 dx_2 \dots dx_D.$$

Con el cambio de variable  $x_i = 1 - 2 \sin^2(u_i/2) = \cos u_i$ , se tiene

$$N_n = \frac{(2D)^n}{\pi^D} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left(1 - \frac{2}{D} (\sin^2 \frac{u_1}{2} + \sin^2 \frac{u_2}{2} + \dots + \sin^2 \frac{u_D}{2})\right)^n du_1 du_2 \dots du_D.$$

Si se conviene que  $N_0 = 1$ , esta igualdad también es cierta para  $n = 0$ . De esta forma,  $\sum_{n=1}^\infty (2D)^{-n} N_n = -1 + \sum_{n=0}^\infty (2D)^{-n} N_n$ . Sustituyendo  $N_n$  por la fórmula integral ante-

rior y empleando que  $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = 1/(1 - r)$  para  $|r| < 1$ , se tiene

$$-1 + \frac{D}{2\pi^D} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left( \text{sen}^2 \frac{u_1}{2} + \text{sen}^2 \frac{u_2}{2} + \dots + \text{sen}^2 \frac{u_D}{2} \right)^{-1} du_1 du_2 \dots du_D.$$

Cuando los  $u_i$  tienden a cero,  $(\text{sen}^2 \frac{u_1}{2} + \text{sen}^2 \frac{u_2}{2} + \dots + \text{sen}^2 \frac{u_D}{2}) / (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_D^2) \rightarrow 1/2$ , de modo que la integral converge si y sólo si  $\int_B \|\vec{x}\|^{-2} < \infty$  con  $B$  un entorno del origen, por ejemplo la bola unidad en  $\mathbb{R}^D$ . Pasando a esféricas (generalizadas), esta integral es, salvo un factor constante,  $\int_0^1 r^{-2} \cdot r^{D-1} dr$ , que claramente converge para  $D > 2$  y diverge en otro caso. ■

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Explicar por qué en  $\mathbb{Z}^D$  hay  $(2D)^M$  paseos de longitud  $M$ .  
 b) Explicar por qué hay  $N_n(2D)^{M-n}$  paseos en  $\mathbb{Z}^D$  que vuelven a casa en el paso  $n$ -ésimo.

2) Hallar la probabilidad de estar a diez pasos de distancia de casa después de haber dado 20. ¿Cuál es la respuesta si se dan 21?

3) En el caso  $D = 1$  escribir el número medio de vueltas a casa como una serie que involucre números combinatorios. Sabiendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-2n} \sqrt{\pi n} \binom{2n}{n} = 1$ , demostrar la divergencia de la serie.

4) Repetir el problema anterior si la probabilidad de dar un paso a la derecha es  $p > 0.5$ , pero demostrando ahora la convergencia de la serie. Indicar por qué este resultado es natural.

5) Calcular la varianza de la variable aleatoria que indica la posición tras  $n$  pasos. Concluir que es muy raro llegar a una distancia mucho mayor que  $\sqrt{n}$ .

6) Si  $B_R$  es el número de puntos de  $\mathbb{Z}^D$  en la bola de radio  $R$ , probar que  $\lim_{R \rightarrow \infty} n/B_{\sqrt{n}} = 0$  si y sólo si  $D > 2$ . A partir del problema anterior, explicar por qué es lógico que justamente para  $D > 2$  un camino a la larga no vuelva a visitar un punto y por tanto el número de regresos al origen se deba fundamentalmente a lo que ocurre con caminos cortos y por tanto sea finito.

7) Utilizando que  $x \geq \sin x$  en  $[0, \pi/2]$ , y que  $[0, \pi]^3$  incluye al primer octante de la bola de radio  $\pi$ , dar una cota inferior para la integral del teorema de esta sección cuando  $D = 3$ .

8) Generalizar el resultado del problema anterior para  $D > 3$ .

9) En [Dy-Mc], después de concluir que el número medio de vueltas a casa es finito para  $D \geq 3$ , se afirma: “Como el origen no es de ningún modo especial, lo mismo debe ocurrir para cualquier punto de  $\mathbb{Z}^D$ . Pero esto significa que para cualquier  $R < \infty$  la partícula [el paseante] acaba dejando de visitar la bola  $\|\vec{x}\| < R$ , y esto es lo mismo que decir  $\text{Prob}(\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = \infty) = 1$  [donde  $s_n$  es la posición tras  $n$  pasos]”. Explicar este argumento con todo el rigor que sea posible.

10) A partir de la varianza de la posición, indicar intuitivamente, en el caso  $D = 1$ , por qué típicamente cada vez se tarda más en volver al origen. Dar con ello una explicación de las rachas de mala o buena suerte que mencionan muchos jugadores.

11) Supongamos un circuito en forma de polígono regular tal que en cada vértice hay probabilidades no nulas  $p$  y  $1 - p$  de ir a la derecha y a la izquierda (no necesariamente las mismas en diferentes vértices). ¿Es siempre infinito el número medio de retornos al punto de partida?

## SECCIÓN 4.2

### **Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos** (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- Teoría de Colas y sus aplicaciones.
- Modelos del tráfico.

#### Generales:

- Generación de números aleatorios.

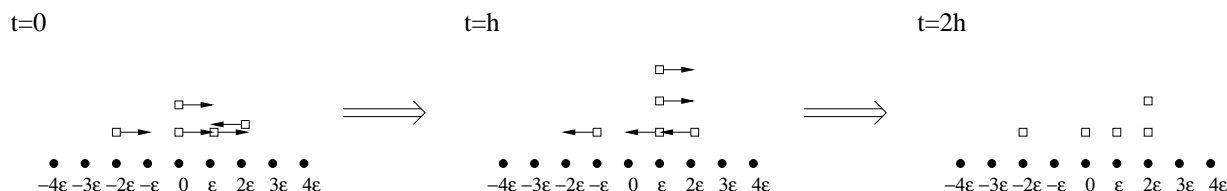
### **Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*El demonio imaginario de Maxwell, que puede entresacar las moléculas una a una, bien podría constreñir al mundo a volverse atrás. ¿Puede volver allí por sí mismo? Esto no es imposible, no es más que infinitamente poco probable; hay probabilidades de que deberíamos esperar mucho tiempo el concurso de las circunstancias que permitieran el retroceso, pero tarde o temprano ellas se realizarán después de tantos años que para escribir su número serían menester millones de cifras. [Po] p. 119.*

### 4.3. Vienen o van

En 1827 el botánico R. Brown observó el *movimiento browniano* consistente en que pequeñas partículas de polen suspendidas en una disolución se trasladan siguiendo caminos caóticos. Sus contemporáneos (y en parte él mismo) pensaron que esto era un signo de vida primaria, pero más tarde el desarrollo de la teoría atómica probó que representaba los empujones que dan las moléculas a las partículas de polen en direcciones aleatorias. De la misma forma, podemos estudiar los fenómenos de difusión de un gas ocultando nuestro desconocimiento submicroscópico diciendo que las moléculas que lo conforman se mueven totalmente al azar, ya que las colisiones entre ellas las hacen cambiar continuamente de dirección.

Para simplificar vamos a restringirnos al caso unidimensional, esto es, como si las partículas de un gas estuvieran metidas en un tubo largo y delgado y sólo pudieran ir a la derecha o a la izquierda. Si hiciéramos fotos de las partículas cada  $h$  segundos durante cierto periodo de tiempo, sólo ocuparían un conjunto discreto de valores (las veríamos saltar a trompicones, como ocurre con las luces estroboscópicas en las discotecas). Por ello no es descabellado suponer que cada una describe un paseo aleatorio en  $\epsilon\mathbb{Z}$  donde  $\epsilon > 0$  es un número muy pequeño. En los instantes  $0, h, 2h, 3h$ , etc. cada partícula puede trasladarse  $\epsilon$  unidades (una casilla) a la derecha o hacia la izquierda con la misma probabilidad (el 50%).



Fijado un tiempo  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ , habrá cierta densidad (porcentaje) de partículas  $p(x_n, t_k)$  en el punto  $x_n = n\epsilon$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Esto es,

$$p(x_n, t_k) = \frac{\text{número de partículas en } x_n}{\text{número total de partículas}}.$$

Se puede entender  $p$  como una probabilidad (la de encontrar una partícula en  $x_n$ ) y evidentemente  $\sum_n p(x_n, t_k) = 1$ , lo que manifiesta la conservación del número de partículas.

El problema que consideramos es predecir la evolución de esta densidad o probabilidad suponiéndola conocida sólo en el tiempo inicial  $t_0 = 0$ . A modo de ilustración, imaginemos que se dejan de golpe en el origen de coordenadas un montón de hormigas rastreadoras. Cada una de ellas seguirá un camino aleatorio y aunque no seamos capaces de saber dónde

estará al cabo de un rato la hormiga  $j$ -ésima, desde lejos veremos una mancha negra que se expande. Lo que queremos es capturar esa idea y deducir el comportamiento a gran escala a partir de la distribución inicial, sin importarnos las partículas u hormigas individuales, haciendo, como se dice en [Va 2], “predicciones sobre lo no exacto”.

Con esta idea, debemos considerar una cantidad innumerable de partículas y, para que el modelo represente fenómenos reales, la densidad de probabilidad  $p/\epsilon$ , debe acercarse a una función suave al pasar al caso continuo en el que  $\epsilon$  y  $h$  tienden a cero (de forma adecuada). Es posible concretar más la forma en la que  $\epsilon$  y  $h$  se deben hacer pequeños para que el modelo discreto tienda a uno continuo con sentido. Considerando la variable aleatoria que da la posición de una partícula que parte del origen en un paseo aleatorio de  $k$  pasos en  $\epsilon\mathbb{Z}$ , su desviación típica es  $\epsilon\sqrt{k}$ . Esto implica que típicamente en  $kh = 1$  segundo una partícula se ha desplazado  $\epsilon\sqrt{k} = \epsilon h^{-1/2}$  metros de su posición inicial. Si no queremos que el conjunto de partículas “explote” o que permanezca inmóvil, deberemos hacer que esta velocidad media en el primer segundo,  $\epsilon h^{-1/2}$ , sea una constante positiva. Volviendo a las hormigas, puede haber unas que se alejen más por seguir caminos más rectos y otras que se alejen menos, pero no queremos que en promedio toda la nube avance infinito o cero en el primer segundo (aunque no descartamos que alguna lo haga), sino cierta cantidad positiva.

Parece muy complicado controlar una infinidad de paseos aleatorios, sin embargo hay una ecuación muy sencilla que regula la evolución de  $p$ , simplemente conviniendo que cada partícula que llega a  $x_n$  en  $t = t_{k+1}$  tiene un 50% de posibilidades de provenir de  $x_{n-1}$  (de la izquierda) en el tiempo anterior  $t = t_k$ , y otro 50% de provenir de  $x_{n+1}$  (de la derecha). Es decir,

$$(4.3) \quad p(x_n, t_{k+1}) = \frac{1}{2}(p(x_{n-1}, t_k) + p(x_{n+1}, t_k)).$$

#### Diccionario:

- Posiciones posibles  $\longrightarrow x_n = n\epsilon, n \in \mathbb{Z}$ .
- Tiempos posibles  $\longrightarrow t_k = kh, k = 0, 1, 2, \dots$
- Concentración (densidad, probabilidad)  $\longrightarrow p(x_n, t_k) \geq 0$  con  $\sum_n p(x_n, t_k) = 1$ .
- Al encontramos con una partícula hay la misma probabilidad de que el instante previo estuviera a derecha o izquierda  $\longrightarrow p(x_n, t_{k+1}) = (p(x_{n-1}, t_k) + p(x_{n+1}, t_k))/2$ .
- Velocidad media finita  $\longrightarrow \epsilon h^{-1/2} = \text{cte}$ .
- Discreto  $\rightarrow$  continuo  $\longrightarrow p/\epsilon \rightarrow u =$  función suave.



La fórmula (4.3) es una relación de recurrencia que permite estudiar la evolución de nuestro modelo discretizado, sin embargo aspiramos a estudiar el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . El razonamiento que vamos a hacer es realmente sencillo. Escribimos simplemente la relación (4.3) como

$$\frac{p(x_n, t_{k+1}) - p(x_n, t_k)}{h} = \frac{\epsilon^2}{2h} \frac{p(x_{n-1}, t_k) + p(x_{n+1}, t_k) - 2p(x_n, t_k)}{\epsilon^2}.$$

Usando el lenguaje de la asignatura de Cálculo Numérico II, éste es el método de diferencias finitas aplicado a  $\partial u / \partial t = \frac{1}{4} \alpha \partial^2 u / \partial x^2$  con  $\alpha = 2\epsilon^2 / h$ . Dicho de otra forma, el miembro izquierdo aproxima a la derivada respecto a la segunda variable cuando  $h \rightarrow 0$  mientras que en el segundo miembro aparece una derivada segunda. Por si esto último no se cubrió en el curso de Cálculo I, lo enunciamos a continuación:

**Lema 4.4.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f''(a)$  existe, entonces*

$$f''(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \epsilon) + f(a - \epsilon) - 2f(a)}{\epsilon^2}.$$

DEM.: Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \epsilon) + f(a - \epsilon) - 2f(a)}{\epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f'(a + \epsilon) - f'(a)}{2\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f'(a - \epsilon) - f'(a)}{-2\epsilon}.$$

Y basta aplicar la definición de derivada. ■

Retomando el argumento anterior, si  $\epsilon$  y  $h$  tienden a cero con  $\alpha = 2\epsilon^2/h$ , constante, y  $p/\epsilon$  tiende en un sentido apropiado a una función suave  $u$ , ésta debe cumplir  $\partial u / \partial t = \frac{1}{4} \alpha \partial^2 u / \partial x^2$ . Partiendo de una concentración inicial  $u(x, 0) = f(x)$  (una función de densidad suficientemente regular), para estudiar la posterior evolución del sistema hay que resolver la *ecuación del calor*

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

En la sección correspondiente, ya vimos cómo emplear la transformada de Fourier para obtener la solución general de esta ecuación bajo hipótesis adecuadas de regularidad

sobre  $f$ . El coeficiente  $\alpha/4$  no cambia el aspecto de la solución, que es

$$u(x, t) = (\pi\alpha t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^{-1}t^{-1}(x-y)^2} f(y) dy.$$

El caso  $\alpha = 4$  corresponde a la solución de la ecuación del calor habitual,  $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$ . Nótese que cuando  $t \rightarrow +\infty$  la función  $u$  tiende a cero, lo que indica que las partículas están cada vez distribuidas de manera más uniforme en  $\mathbb{R}$ . El aumento de la difusión hace que la densidad se aproxime puntualmente a cero. Esto deja de ser cierto si se plantea (4.4) en un dominio acotada en lugar de en  $\mathbb{R}$ , pero siempre la densidad tenderá a su valor promedio.

Epílogo: En cierto modo en la fórmula anterior para  $u(x, t)$  lo único que se hace es “sumar” (integrar) todas las campanas de Gauss correspondientes a aplicar el teorema central del límite a los paseos aleatorios de cada partícula (la interpretación de ciertas integrales similares a ésta como sumas sobre “todos los caminos aleatorios” [Ze-Ru-So] es muy importante en Física Cuántica [Yn] y no del todo fundamentada matemáticamente). Por simplicidad, aquí sólo hemos tratado el problema en una dimensión; pero el método se extiende a dimensiones superiores con fórmulas similares simplemente cambiando  $\partial^2 u / \partial x^2$  por  $\Delta u$ . Una “pega” que se puede poner al modelo en cualquier dimensión es que si  $f$  tiene soporte compacto,  $u(x, t)$  no lo tiene para ningún  $t > 0$  ya que  $u(x, t) > 0$ , lo que implica que todo funciona como si inicialmente las partículas viajasen arbitrariamente rápido. Aunque esto sea mecánicamente imposible (relatividad especial), el decaimiento exponencial de  $u$  cuando  $x \rightarrow \infty$  provoca que  $u$  sea prácticamente indistinguible de una función de soporte compacto. Sólo en condiciones extremas debemos modificar el modelo reemplazando la ecuación del calor por la *ecuación de los medios porosos*.

## Ejercicios

**1)** Sin mirar la teoría: a) Explicar el significado de la fórmula de recurrencia básica  $p(x_n, t_{k+1}) = (p(x_{n-1}, t_k) + p(x_{n+1}, t_k))/2$ . b) Indicar qué representa que la solución de la ecuación del calor tienda a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

**2)** Explicar por qué la ecuación del calor  $\partial u / \partial t = \frac{1}{4}\alpha \partial^2 u / \partial x^2$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$  con  $u(x, 0) = f(x)$  y  $u(0, t) = 0$  corresponde al caso en que el origen hay un “agujero” que absorbe las partículas.

**3)** Si en el problema anterior en  $x = 0$  hay una barrera que impide que las partículas pasen hacia la izquierda, tratar de justificar por qué se debe imponer  $\partial u / \partial x(0, t) = 0$  en lugar de  $u(0, t) = 0$ .

**4)** Traducir la relación  $\sum_n p(x_n, t_k) = 1$  para todo  $k$  en alguna ley de conservación para la ecuación del calor en  $\mathbb{R}$  (con  $f$  de decaimiento rápido) y demostrarla. Estudiar si tal ley se sigue cumpliendo para la ecuación del calor en  $[0, \infty)$  bajo las condiciones especificadas en los dos problemas anteriores.

**5)** Supongamos que cada partícula puede con igual probabilidad moverse a la derecha, a la izquierda, o quedarse inmóvil. Indicar los cambios en el modelo y estudiar si hay diferencias cuando se pasa al límite.

**6)** La concentración de partículas en los cuatro vértices de un cuadrado es del 12'5%, 12'5%, 37'5% y 37'5%. Calcular la concentración esperada después de tres unidades de tiempo, sabiendo que en cada una de ellas cada partícula se dirige aleatoriamente a uno de los dos vértices adyacentes.

**7)** Si  $f$  es continua de soporte compacto probar que  $u \in C^\infty$ . El proceso de reemplazar una señal  $f = f(x)$  por  $u(x, t)$  con  $t$  pequeño se emplea habitualmente para reducir ruidos. Explicar por qué. (En teoría de la señal se llama a esto un *filtro gaussiano*).

**8)** Escribir la ecuación de recurrencia para  $p$  si la probabilidad de una partícula de ir a la derecha y a la izquierda no coinciden. Argumentar por qué en este modelo se observa transporte (traslación) más que difusión.

**9)** Generalizar el modelo de esta sección al caso bidimensional escribiendo la relación de recurrencia para  $p$  y la ecuación límite.

**10)** Hallar una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que no tenga derivada segunda en cero pero tal que exista el límite  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(h) + f(-h) - 2f(0))/h^2$ .

**11)** Sea  $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$  y  $L_h(x, y) = \Delta f(x, y) - (f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h) - 4f(x, y))/h^2$ . Utilizando la fórmula de Taylor, demostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0} L_h/h^\alpha = 0$  para todo  $\alpha < 2$ .

SECCIÓN 4.3

## Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros (el precio de esta fotocopia)

De la sección:

- Procesos de difusión en Matemática Financiera.
- Relación entre el movimiento browniano y el número de Avogadro (puede ser interesante indagar los errores teóricos y prácticos que llevaron a Einstein a deducir en su tesis que el número de Avogadro era aproximadamente  $2'1 \cdot 10^{23}$  mientras que el valor real es casi el triple).
- Mecánica Estadística.
- Ecuaciones diferenciales estocásticas.

Generales:

- Métodos matemáticos en Astrofísica.

### Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

*No podemos prever en qué sentido vamos a extendernos; quizás sea la teoría cinética de los gases la que se desarrollará y servirá de modelo a las otras. Entonces, los hechos que primeramente aparecían como simples, no serán más que las resultantes de un número muy grande de hechos elementales que sólo las leyes del azar harían concurrir a un mismo fin. La ley física, por lo tanto, tomaría un aspecto completamente nuevo. Ya no sería solamente una ecuación diferencial; adquiriría el carácter de una ley estadística. [Po] p. 136.*

## Puede que poder pudieras

**Material:**

- Diez dados.
- Un cubilete.
- Material para dibujar una gráfica.

Consideremos la variable aleatoria que asigna la cara de puntuación  $n$  de un dado el número  $(n - 3'5)/\sqrt{175/6}$ . Se comprueba con un cálculo que tiene esperanza nula y varianza 0'1. El teorema central del límite sugiere que si consideramos el lanzamiento de 10 dados y la suma  $S$  de sus puntuaciones, entonces  $(S - 35)/\sqrt{175/6}$  tiene aproximadamente una distribución  $N(0, 1)$ . Equivalentemente,  $S$  tiene aproximadamente una distribución  $N(35, \sqrt{175/6})$ . Es decir, cabe esperar

$$\text{Prob}(S = n) \approx \frac{1}{\sqrt{175\pi/3}} e^{-3(n-35)^2/175}.$$

La cantidad de formas en que se puede obtener suma igual a  $n$ ,  $10 \leq n \leq 60$  al lanzar 10 dados está recogida en la siguiente tabla:

<b>10</b> → 1	<b>11</b> → 10	<b>12</b> → 55	<b>13</b> → 220	<b>14</b> → 715
<b>15</b> → 2002	<b>16</b> → 4995	<b>17</b> → 11340	<b>18</b> → 23760	<b>19</b> → 46420
<b>20</b> → 85228	<b>21</b> → 147940	<b>22</b> → 243925	<b>23</b> → 383470	<b>24</b> → 576565
<b>25</b> → 831204	<b>26</b> → 1151370	<b>27</b> → 1535040	<b>28</b> → 1972630	<b>29</b> → 2446300
<b>30</b> → 2930455	<b>31</b> → 3393610	<b>32</b> → 3801535	<b>33</b> → 4121260	<b>34</b> → 4325310
<b>35</b> → 4395456	<b>36</b> → 4325310	<b>37</b> → 4121260	<b>38</b> → 3801535	<b>39</b> → 3393610
<b>40</b> → 2930455	<b>41</b> → 2446300	<b>42</b> → 1972630	<b>43</b> → 1535040	<b>44</b> → 1151370
<b>45</b> → 831204	<b>46</b> → 576565	<b>47</b> → 383470	<b>48</b> → 243925	<b>49</b> → 147940
<b>50</b> → 85228	<b>51</b> → 46420	<b>52</b> → 23760	<b>53</b> → 11340	<b>54</b> → 4995
<b>55</b> → 2002	<b>56</b> → 715	<b>57</b> → 220	<b>58</b> → 55	<b>59</b> → 10
<b>60</b> → 1				

La probabilidad de  $S = n$  es por tanto el número asignado a  $n$  dividido por el número de casos posibles  $6^{10} = 60\,466\,176$ . Con ello se comprueba que la bondad de la aproximación anterior es increíble teniendo en cuenta que sólo usamos  $N = 10$  dados mientras que la teoría nos habla de lo que ocurre cuando  $N \rightarrow \infty$ . Si representamos en una gráfica ambos

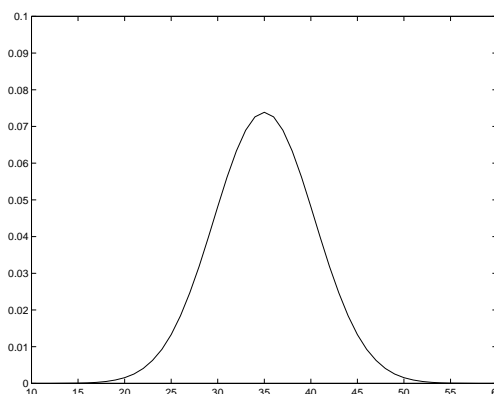
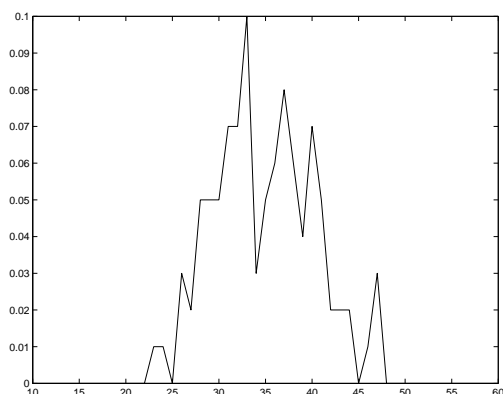
miembros de la aproximación, no es posible detectar diferencias a simple vista, salvo quizá en los tres puntos centrales donde el error relativo es menor que el 2%.

Una vez que hemos visto lo extraordinariamente bien que una normal aproxima a la distribución de la suma de las puntuaciones de 10 dados, el experimento consistirá en comprobar que si estimamos las probabilidades estadísticamente tirando nosotros mismos los dados, nos cansaremos antes de ver una campana de Gauss decente. La moraleja es que debemos creer ciegamente en la Estadística pero no siempre en las estadísticas.

Concretamente, el experimento es muy simple y consiste en lanzar los dados con el cubilete un número de veces grande  $A$ , hasta que nos aburramos, y apuntar en cada caso la suma. Al terminar, tras desperezarnos, compararemos las gráficas obtenidas al representar los puntos con abscisa  $10 \leq n \leq 60$  y ordenadas

$$\frac{\text{n}^\circ \text{ de veces en que la suma es } n}{A}, \quad \frac{1}{\sqrt{175\pi/3}} e^{-3(n-35)^2/175}.$$

Por ejemplo, en un experimento real\* con  $A = 100$  se obtuvo



El error en el punto central  $n = 35$  es de más del 30% y en el punto anterior  $n = 34$  de casi el 60%.

Explicación: En principio no hay ninguna contradicción: la aproximación es tan buena como antes sólo si  $A$  es suficientemente grande (ley de los grandes números [Fe]). La pregunta natural es por qué 100 o 200 (donde sólo habrán llegado los más pacientes) no es un número *suficientemente grande*. Evidentemente con un ordenador podríamos simular

---

\* *N. del A.* Como el experimento es un poco largo, más vale hacerlo con comodidad. Lancé los datos en un barreño para que no se desperdigaran. Después de cada tirada los llevaba hacia el borde alineándolos y copiaba las puntuaciones en una hoja de cálculo que efectuaba las sumas en mi lugar. Con ello también quise recopilar datos sobre las frecuencias para tratar de desmentir la queja típica cuando se juega al parchís de que existe “el dado de los seises”.

el lanzamiento de los dados un millón de veces y entonces el resultado sería bastante aproximado, pero hacer el experimento 100 o 200 veces de verdad, sin delegar en las tripas de un ordenador, conlleva tanto esfuerzo que es descorazonadora la pobreza de la aproximación.

Demos a nuestra pregunta una forma matemática un poco más concreta y calculemos por ejemplo de qué tamaño debe ser típicamente  $A$  para que el error en el punto central  $n = 35$  sea menor que el 10%. Para tal fin, considérese la variable aleatoria que al tirar los dados  $A$  veces cuenta el número de veces en que la suma es 35 (número de éxitos). Esta variable aleatoria claramente tiene una distribución binomial  $B(A, p)$  con  $p$  la probabilidad de obtener suma igual a 35. Según la tabla,  $p = 4395456/6^{10} \approx 0'074$ . La esperanza de esta binomial es  $pA$ , y la desviación típica  $\sqrt{p(1-p)A}$ , por tanto cuando hagamos el experimento  $A$  veces, lo normal es que en vez de obtener  $pA$  veces suma 35 la obtengamos  $pA + \text{error}$  veces con **error** una cantidad comparable a  $\sqrt{p(1-p)A}$ . Si queremos que el error relativo sea típicamente menor que el 10%, se debería cumplir

$$\sqrt{p(1-p)A} < \frac{10}{100}pA, \quad \text{o equivalentemente} \quad A > \frac{1-p}{(0'1)^2p}.$$

Sustituyendo  $p$  por  $0'074$ , esto conduce a  $A > 1251$ .

El error cometido al efectuar nuestra estadística preguntando a muchos dados qué número se obtiene como suma, ha sido bastante burdo: simplemente no deberíamos haber preguntado a muchos, sino a muchísimos, a más de mil. Errores como éste no se producen en las estadísticas serias (que no son todas las que aparecen en los medios de comunicación), porque son de algún modo de naturaleza matemática. Aunque éstos pueden llegar a ser realmente sutiles [**Ju**], seguramente los errores más graves en las estadísticas y que posiblemente invalidan un número no desdeñable de ellas, están ligados a factores psicológicos. Por ejemplo, es muy fácil obtener un “no sabe/no contesta” o una mentira al preguntar sobre temas escabrosos. También la forma de las estadísticas está muchas veces influida por lo que se quiere demostrar o por los propios prejuicios. Por ejemplo, si la imagen  $I$  de un suceso trágico e impresionante ha aparecido muchas veces en televisión, las preguntas: “¿Cree usted que se ha emitido demasiadas veces  $I$ ?”, “¿Cree usted que se debería evitar la emisión de  $I$ ?” y “¿Cree usted que deberían prohibir emitir  $I$ ?”; arrojarían resultados desiguales. Si hiciéramos la primera pregunta la respuesta sería seguramente “sí”, pero si hiciéramos la segunda o la tercera, casi todos intentamos no involucrarnos en algo que sugiera escabullirse o prohibir, de modo que la respuesta tendería más al “no”. Las conclusiones que alguien sacara de los resultados podrían llegar a ser opuestas aunque

las preguntas no lo sean.

Los que hayan hecho la experiencia anterior con los dados, probablemente ya habrán notado una curiosa manifestación experimental de lo psicológico. Al tirar los 10 dados casi todas las veces parece que las puntuaciones obtenidas tienen algo de singular e improbable: hay muchos seises, hay varios dados seguidos con puntuación ascendente, casi todas las puntuaciones son menores que cuatro, etc. La mayoría de las veces pensamos que hemos tenido “buena” o “mala suerte”, sin saber reconocer lo rutinario.



## Todo por igual

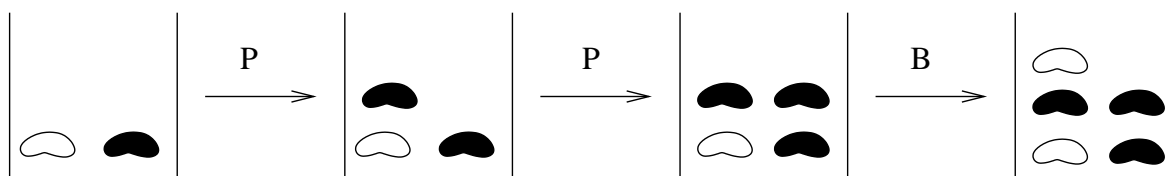
### Material:

- Un montón de judías blancas crudas (sin cocinar).
- Un montón de judías pintas similares a las anteriores.
- Un programa para generar números aleatorios y dibujar gráficas (opcional).

¿Qué ocurre cuando dos empresas compiten lanzando al mercado productos similares e incompatibles? Estamos acostumbrados a ver que en esta situación (sistemas de vídeo, sistemas operativos de ordenadores), después de una pugna inicial con altibajos, la empresa que logra una ventaja significativa acaba con la otra, independientemente de la calidad del producto, ya que *el pez grande se come al chico*.

Lo que vamos a comprobar, gracias a un bello, interesante y sorprendente modelo conocido como *urna de Pólya*, es que el mundo matemático es menos violento y permite una coexistencia pacífica.

Metamos una judía de cada color en un bote. Éstas representarán los productos iniciales de cada empresa. No es descabellado suponer que los clientes eligen al azar entre los nuevos productos, por tanto si hay una desproporción en la oferta a favor de uno de ellos, lo elegirán más. Escojamos pues, una judía al azar del bote, y después de verla, repongámosla y añadamos otra judía del mismo color. Ahora habrá dos judías de un tipo y una de otro, con lo cual es más fácil escoger las primeras. Repitamos el procedimiento un número grande de veces\*.



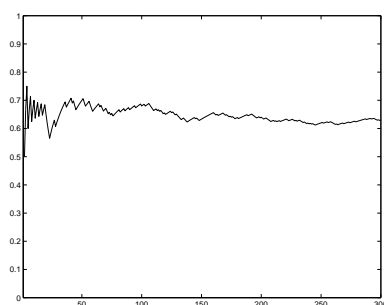
Cabría esperar que una mayoría clara obtenida al azar, en unas cuantas iteraciones se convierte en aplastante. Pero el experimento nos muestra, prácticamente siempre, volcando el bote, que hay una proporción apreciable de la minoría que no sólo no tiende a desaparecer sino que parece estabilizarse.

---

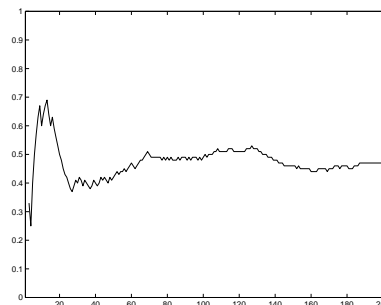
\* *N. del A.* Repetí el proceso 200 veces anotando los resultados en una hoja de cálculo para poder representar la evolución del sistema.

Una simulación con ordenador nos muestra que éste es el caso.

Simulación



Ejemplo real



Explicación: Sea  $X_n$  la variable aleatoria que toma el valor 1 si en la  $n$ -ésima extracción la judía es blanca y 0 si es pinta. La propiedad importante de estas variables aleatorias es que aunque no son independientes, son *intercambiables*. Esto quiere decir que para cualquier vector de ceros y unos  $\vec{v} \in \{0, 1\}^N$ , se tiene la igualdad de probabilidades

$$P((X_1, X_2, \dots, X_N) = \vec{v}) = P((X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(N)}) = \vec{v})$$

donde  $\sigma$  es cualquier permutación en  $S_N$  (reordenamiento de  $1, 2, \dots, N$ ). Este hecho, muy poco intuitivo, es ridículamente sencillo de comprobar escribiendo las cuentas. Por ejemplo, las probabilidades de que las tres primeras extracciones sea BBP, BPB o PBB, son respectivamente (abajo se indica las que hay de cada tipo en el bote):

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4}$																														
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: left; width: 100%;"> <tr><td>B</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>P</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	B	1	2	3	3	P	1	1	1	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: left; width: 100%;"> <tr><td>B</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>P</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table>	B	1	2	2	3	P	1	1	2	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: left; width: 100%;"> <tr><td>B</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>P</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table>	B	1	1	2	3	P	1	2	2	2
B	1	2	3	3																												
P	1	1	1	2																												
B	1	2	2	3																												
P	1	1	2	2																												
B	1	1	2	3																												
P	1	2	2	2																												

La probabilidad de que al extraer  $N$  judías, las primeras  $m$  sean blancas y las  $N - m$  restantes pintas, es

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{m+2} \cdot \frac{2}{m+2} \cdot \frac{3}{m+2} \cdots \frac{N-m}{N+1} = \frac{m!(N-m)!}{(N+1)!}$$

Por la propiedad de intercambiabilidad, la probabilidad de que después de  $N$  extracciones haya exactamente  $m + 1$  judías blancas en el bote es, por tanto

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_N = m) = \binom{N}{m} \frac{m!(N-m)!}{(N+1)!} = \frac{1}{N+1}$$

Es decir, que todas las proporciones de judías blancas y pintas son equiprobables. La distribución de esta proporción es la uniforme (para la existencia y sentido de la “distribución límite”, véase [Fe]).

## 5. Fluidos

### 5.1. Navegando

Cuando oímos la palabra *fluido* imaginamos algo que potencialmente puede manar de un sitio a otro y que puede sortear obstáculos y estrechamientos. Aunque empleemos o leamos expresiones como fluido eléctrico, o incluso fluido calórico, el Bachillerato y el diccionario nos recuerdan que en primer lugar debemos pensar en líquidos y gases. Los fluidos mantienen una suerte de oposición frente a los sólidos, cuyas moléculas son tan gregarias que avanzan en grupos inalterables permitiendo sólo movimientos rígidos. Las moléculas de los fluidos se tienen menos apego unas a otras y, al menos idealmente, no ponen reparos a cambiar las distancias con sus vecinas buscando nuevas amistades.

Hay dos formas de describir el movimiento de las partículas de un fluido. Una es perseguir a cada partícula dando su ecuación de movimiento (descripción lagrangiana), y la otra es quedarnos quietos en un punto y medir la velocidad de la partícula que pasa por allí (descripción euleriana). Esta segunda forma se muestra más natural a la hora de escribir las ecuaciones básicas de la Mecánica de Fluidos. Matemáticamente corresponde a dar una función  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  que para cada valor de  $t$  nos diga cuál es la velocidad de la partícula que está en el punto  $\vec{x}$  perteneciente al dominio en el que vive el fluido. En definitiva, fijado  $t$ , la función  $\vec{v}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , el *campo de velocidades*.

La primera ecuación que veremos, es la llamada *ecuación de continuidad*, que expresa la conservación de la masa. Supongamos un fluido de densidad  $\rho$  (en principio no constante) ocupando una región  $V$  de  $\mathbb{R}^3$ . La masa correspondiente es  $\int_V \rho$ . Puede que parte de la masa del fluido escape de la región  $V$ , pero siempre debe hacerlo fluyendo a través de la frontera, que denotamos con  $\partial V$ . Por tanto, la variación de la masa dentro de  $V$  y el flujo a través de  $\partial V$  deben compensarse. En una ecuación:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0.$$

La segunda integral representa el flujo a través de la frontera porque si  $dA$  es un pequeño “cuadradito” en  $\partial V$ , en un tiempo  $dt$  el fluido pasará de  $dA$  a  $dA + \vec{v}dt$ . El paralelepípedo determinado por estos cuadraditos tiene masa  $\rho \vec{v} \cdot \vec{N} |dA| dt$ . Por tanto la cantidad de masa que atraviesa la frontera por unidad de tiempo (el flujo) es la integral de superficie.

La otra ecuación que introduciremos no es más que la ecuación fundamental de la dinámica  $F = ma$ . Si  $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  es la ecuación de movimiento de una partícula de fluido, entonces debe cumplirse  $\vec{x}'(t) = \vec{v}(\vec{x}(t), t)$ . A las soluciones de esta ecuación diferencial se les llama *trayectorias*. Derivando una vez más, la aceleración será

$$\vec{a} = \vec{x}'' = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}.$$

Donde la última igualdad es simplemente notación (bastante lógica pensando que  $\nabla$  es el vector de derivadas parciales).

La fuerza que sufre la porción de fluido en la región  $V$  es, por tanto,  $\int_V \rho \vec{a}$ , entendiendo esta integral de volumen “vectorial”, coordenada a coordenada. En ausencia de fuerzas externas, esta fuerza provendrá de que la porción de fluido en  $V$  es empujada (presionada) por las partículas de fluido de las regiones adyacentes. Para simplificar, supongamos el fluido dividido en pequeños cubitos. La fuerza de unos sobre otros será perpendicular a la superficie de las caras (suponemos que no son “pegajosos”, que no hay rozamiento en los desplazamientos paralelos) y se dirige hacia el interior de cada cubito. Se llama presión  $p$  al módulo de esta fuerza de empuje por unidad de superficie. Las fuerzas debidas a la presión en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  que actúan sobre la superficie  $\partial V$  de un elemento de fluido, son pues  $-\int_{\partial V} (p, 0, 0) \cdot d\vec{S}$ ,  $-\int_{\partial V} (0, p, 0) \cdot d\vec{S}$  y  $-\int_{\partial V} (0, 0, p) \cdot d\vec{S}$ , respectivamente.

Puede haber también fuerzas externas al fluido. Por ejemplo la gravedad, que en la superficie terrestre se empeña en tirar de las cosas hacia abajo con aceleración  $g$ , dando lugar a una fuerza  $\int_V (0, 0, -\rho g)$ . Consideraremos sólo fuerzas conservativas, es decir, tales que la aceleración se puede escribir como  $-\nabla\phi$ , donde  $\phi$  es cierta función, llamada *potencial*, que sólo depende de la posición. Estas fuerzas externas contribuyen  $\vec{F}_{ext} = -\int_V \rho \nabla\phi$ . En el caso anterior  $\phi = gz$ .

El modelo consiste simplemente en añadir a la ecuación de continuidad el balance de fuerzas (ecuación dinámica).

#### Diccionario:

- Velocidad en cada punto e instante  $\longrightarrow \vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ .
- La masa no desaparece  $\longrightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho + \int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ .
- $F = ma$  en una porción de fluido  $\longrightarrow \vec{F} = \int_V \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right)$ .
- Fuerzas de presión  $\longrightarrow \vec{F}_1 = - \left( \int_{\partial V} (p, 0, 0) \cdot d\vec{S}, \int_{\partial V} (0, p, 0) \cdot d\vec{S}, \int_{\partial V} (0, 0, p) \cdot d\vec{S} \right)$
- Fuerzas externas  $\longrightarrow \vec{F}_2 = - \int_V \rho \nabla\phi$ .
- Equilibrio de fuerzas  $\longrightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

Para hacer las ecuaciones del modelo más manejables aplicamos el teorema de la

divergencia. La ecuación de continuidad produce

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

donde la última igualdad se sigue de que  $V$  es una región arbitraria. De la misma forma

$$\vec{F}_1 = - \left( \int_V \frac{\partial p}{\partial x}, \int_V \frac{\partial p}{\partial y}, \int_V \frac{\partial p}{\partial z} \right) = - \int_V \nabla p.$$

Y junto con  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  se sigue  $\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p - \rho \nabla \phi$ . Entonces, el equilibrio de fuerzas (conservación del momento lineal, si uno quiere quedar bien) y la ecuación de continuidad, se pueden resumir en las llamadas *ecuaciones de Euler*

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \rho^{-1} \nabla p + \nabla \phi = \vec{0} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

Como estas ecuaciones son bastante complicadas se consideran diferentes situaciones especiales. Así un *fluido incompresible homogéneo* es aquél cuya densidad  $\rho$  es una función constante. Limitarse a fluidos incompresibles homogéneos deja algunos fenómenos interesantes propios de los gases, pero se ajusta bien a los líquidos y al aire en las condiciones habituales. A partir de ahora nos ocuparemos sólo de este tipo de fluidos que, con cierta impropiedad, denominaremos simplemente *fluidos incompresibles*. Para ellos las ecuaciones de Euler se reducen a

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla(p/\rho + \phi) = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Aquí las incógnitas son  $\vec{v}$  y  $p$ , ya que se supone que podemos conocer fácilmente la densidad del fluido y  $\phi$  viene dada por influencias externas. Si tenemos el fluido contenido en un recipiente estanco, o choca contra un obstáculo, es natural imponer la condición  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  en la frontera, con  $\vec{n}$  el vector normal, lo que significa que el fluido no la atraviesa, sino que sólo puede deslizarse a lo largo de ella. Querríamos partir de una velocidad inicial  $\vec{v}_0(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}, 0)$  y deducir la evolución del fluido. Evidentemente la presión sólo puede estar definida salvo una constante ( $\nabla(p + \text{cte}) = \nabla p$ , lo importante es su incremento; nótese la necesidad de la descompresión en el buceo) pero esperamos determinar la velocidad. Para

dar una idea de la dificultad matemática del modelo, hay que mencionar que no se sabe todavía si existen siempre soluciones bien definidas para todo tiempo, aunque se conoce la existencia y unicidad para tiempo pequeños, y la existencia y unicidad global en el caso bidimensional (fluidos que se mueven en capas planas) [Ma-Pu].

Siguiendo con los casos especiales, si el campo de velocidades  $\vec{v}$  no depende del tiempo, se dice que el fluido es *estacionario*. Esto no significa que se esté quieto, sino que la velocidad de las partículas que lo componen sólo depende del punto por el que pasan. En este caso, en la primera ecuación desaparece el término  $\partial\vec{v}/\partial t$ .

A la función  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$  se le llama *vorticidad*. Por el teorema de Stokes, si  $D$  es una superficie con frontera  $\partial D$ , la circulación de  $\vec{v}$  a lo largo de  $\partial D$  es  $\int_D \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ . De modo que la vorticidad mide de alguna forma “los remolinos” locales, la posibilidad de que un elemento de fluido no sólo avance y se deforme, sino que gire (véase [Va 1] §5.6, [Ch-Ma] §1.2). Si la vorticidad es nula, se dice que el fluido es *irrotacional*.

El primer resultado que veremos afirma que los remolinos no pueden salir de la nada, siempre que las partículas no desaparezcan o se creen espontáneamente.

**Proposición 5.1.** *Supongamos que se cumplen las ecuaciones (5.2) y las trayectorias están definidas para todo tiempo. Si la vorticidad  $\vec{\omega}$  se anula en  $t = 0$  entonces es idénticamente nula.*

DEM.: Partimos de la identidad del cálculo vectorial ([Gr-Ry] 10.31.3' con  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ ):

$$(5.3) \quad (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{F} = (\text{rot } \vec{F}) \times \vec{F} + \frac{1}{2}\nabla(\|\vec{F}\|^2),$$

cuya prueba se reduce a aburrirse un rato. Sustituyendo en la primera ecuación de (5.2)

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 + \phi + p/\rho\right) = 0.$$

Al tomar rotacionales se tiene (recuérdese que  $\text{rot } \nabla = 0$ )

$$(5.4) \quad \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}).$$

En este punto en [Fe-Le-Sa] §40-2 se termina la prueba diciendo “Si  $\vec{\omega} = \vec{0}$  en cualquier lugar y en cualquier instante  $t$ ,  $\partial\vec{\omega}/\partial t$  también es cero, así que  $\vec{\omega}$  es cero en cualquier lugar en  $t + \Delta t$ ”. Esto no parece riguroso en absoluto [Ch-Ma] y nosotros trabajaremos un poco más. Empleamos un nuevo monstruo del cálculo vectorial ([Gr-Ry] 10.31.7’):

$$\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + \vec{F} \text{div } \vec{G} - \vec{G} \text{div } \vec{F}.$$

Por la ecuación de continuidad y  $\text{div rot} = 0$ , (5.4) equivale a

$$(5.5) \quad \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v}.$$

Sea  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  la trayectoria que sigue una partícula inicialmente en  $\vec{x}_0$ , es decir, la solución de  $\vec{x}' = \vec{v}(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . Como habíamos visto al deducir las ecuaciones de Euler, el primer miembro de (5.5) es la derivada de la curva parametrizada  $\vec{\gamma}(t) = \vec{\omega}(\vec{x}(t), t)$ . Por

tanto, dada  $\vec{v}$ , (5.5) se escribe como una ecuación diferencial ordinaria  $\vec{\gamma}' = H(\vec{\gamma}, t)$ . De acuerdo con la teoría, esta ecuación tiene solución única, que en este caso es obviamente  $\vec{\gamma} = \vec{0}$ . Por tanto  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , ya que todo punto está en alguna trayectoria que partió de  $t = 0$ . ■

En diferentes aplicaciones prácticas (por ejemplo en Aeronáutica) es importante estudiar cómo actúa un fluido sobre un objeto inmerso en él que ocupa una región sólida  $V$ . Según el modelo, tal objeto debe sufrir una fuerza debida a la presión de los elementos de fluido adyacentes, dada por

$$\vec{E} = -\left( \int_{\partial V} (p, 0, 0) \cdot d\vec{S}, \int_{\partial V} (0, p, 0) \cdot d\vec{S}, \int_{\partial V} (0, 0, p) \cdot d\vec{S} \right).$$

Por razones obvias se llama *empuje* a esta fuerza.

Veamos dos resultados básicos concernientes a los fluidos estacionarios. El primero, bien conocido, nos dice cuál es el empuje si el fluido está completamente parado.

**Proposición 5.2 (Principio de Arquímedes).** *Si  $\vec{v}$  es idénticamente nula y  $\phi = gz$  (el potencial gravitatorio) entonces*

$$\vec{E} = (0, 0, g \int_V \rho).$$

Nota: como  $\int_V \rho$  es la masa de la región  $V$  si estuviera llena de fluido, lo que dice este resultado es que “todo cuerpo sumergido en un fluido (incluso no incompresible), sufre un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen de fluido que desaloja”.

DEM.: Como ya habíamos visto, por el teorema de la divergencia,  $\vec{E} = - \int_V \nabla p$ . Según la primera ecuación de (5.1), si  $\vec{v}$  es idénticamente nula  $\vec{E} = \int_V \rho \nabla \phi$ . Sustituyendo  $\phi = gz$  se tiene el resultado deseado. ■

**Proposición 5.3 (Teorema de Bernoulli).** *En un fluido (incompresible) estacionario, la cantidad  $\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2 + p + \rho\phi$  permanece constante a lo largo de cada trayectoria.*

DEM.: Multiplicando la primera ecuación de (5.2) por  $\rho$  y aplicando (5.3), en el caso estacionario se obtiene

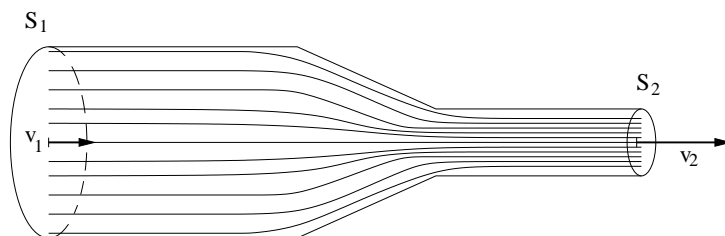
$$\rho \vec{\omega} \times \vec{v} + \nabla \left( \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2 + p + \rho \phi \right) = 0.$$

Multiplicando escalarmente por  $\vec{v}$ , se elimina la vorticidad,  $(\nabla \left( \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2 + p + \rho \phi \right)) \cdot \vec{v} = 0$ . Y la regla de la cadena en la forma  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ , prueba que esta fórmula equivale a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}(\vec{x}(t))\|^2 + p(\vec{x}(t)) + \rho \phi(\vec{x}(t)) \right) = 0,$$

como se quería demostrar. ■

Una de las muchas aplicaciones es el estudio de la caída de presión cuando una tubería cilíndrica de sección  $S_1$  se estrecha hasta una sección  $S_2$ . Suponemos, como es natural, que la velocidad es perpendicular a la sección antes y después del estrechamiento; pasando de tener módulo  $v_1$  a  $v_2$ .



Siguiendo el camino inverso al empleado para deducir la ecuación de continuidad

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{v} = \int_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{S} = S_2 v_2 - S_1 v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1.$$

Como era de esperar, por el lado más estrecho el agua sale más rápido ([Ga] p. 374). Según el teorema de Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2.$$

Sustituyendo  $v_2$  se deduce

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{v_1^2}{2S_2^2} (S_1^2 - S_2^2).$$

Así pues, con  $v_1$  constante,  $S_2 \rightarrow 0 \Rightarrow p_1 - p_2 \rightarrow +\infty$ . Entonces, como reflejan los dibujos animados, si pisamos una mangera no explotará por el sitio por el que la hemos pisado, sino por alguno de sección mayor (allí donde hay más agua esperando).



## Ejercicios

**1)** Sin mirar la teoría: a) Explicar por qué el campo de velocidades de un fluido incompresible homogéneo debe tener divergencia nula. b) Si  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  es el campo de velocidades de un fluido y la aceleración se define como derivada temporal de la velocidad, ¿por qué la aceleración de las partículas del fluido no es la derivada de  $\vec{v}$  respecto a la última coordenada,  $t$ ?

**2)** Si  $\vec{v} = (x^2 + x + z, -2xy + t, az + e^{tx})$  es el campo de velocidades de un fluido incompresible, hallar  $a$  y calcular la aceleración que tiene la partícula que pasa por el origen en  $t = 0$ .

**3)** Un fluido compresible homogéneo es aquél cuya densidad  $\rho$  sólo depende de  $t$ . Esto es, tal que la densidad puede variar pero siempre por igual en todos los puntos. Demostrar que en este tipo de fluidos si la divergencia del campo de velocidades es positiva entonces  $\rho$  debe decrecer. ¿Qué significa esto físicamente?

**4)** Comprobar que el campo de velocidades  $\vec{v} = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2, 2xy/(x^2 + y^2)^2, 0)$  corresponde a un fluido incompresible estacionario, y demostrar que cada trayectoria  $(x(t), y(t), z(t))$  verifica  $y(t) = C(x^2(t) + y^2(t))$  para cierta constante  $C$ . (Esto último equivale a verificar que la derivada de  $y(t)/(x^2(t) + y^2(t))$  es nula).

**5)** Considérese un hexaedro regular (cubo) homogéneo de lado  $l = 10 \text{ cm}$  y densidad  $\rho = 0'9 \text{ gr/cm}^3$ . Suponiendo que permanece en equilibrio flotando en el agua en su posición habitual, calcular por dónde llegará la línea de flotación.

**6)** Repetir el problema anterior cuando el objeto que flota es un cono invertido que tiene altura  $10 \text{ cm}$ , diámetro de la base  $20 \text{ cm}$  y densidad  $0'5 \text{ gr/cm}^3$ .

**7)** ¿Dónde correría más deprisa un mismo río, aquí o en la Luna? (Supóngase nula en ambos casos la presión “atmosférica”).

**8)** Una tubería horizontal de sección circular tiene un estrechamiento, pasando su radio de  $2 \text{ cm}$  a  $1 \text{ cm}$ . Si el agua mana por la parte ancha a  $1 \text{ m/s}$  y la presión en la parte estrecha es  $200\,000 \text{ N/m}^2$ , hallar la presión en la parte ancha y la velocidad en la estrecha.

**9)** Suponiendo que la tubería del problema anterior tiene un metro de longitud, repetir el problema cuando la tubería está inclinada  $30^\circ$  con el lado estrecho hacia abajo. (Se supone que el caudal de agua se ajusta perfectamente a la tubería, sin estrecharse).

**10)** Probar que si el campo de velocidades de un fluido incompresible irrotacional y estacionario tiene dos coordenadas constantes, la tercera también lo debe ser.

**11)** Si una pelotita flota en el agua y la empujamos ligeramente hacia abajo, comenzará a oscilar. Estudiar si el movimiento es armónico simple (esto es, si la fuerza es proporcional a la distancia a la posición de equilibrio) cuando se supone despreciable el campo de velocidades del fluido.

## SECCIÓN 5.1

**Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos** (el precio de esta fotocopia)De la sección:

- Ondas en fluidos.

Generales:

- Las funciones de Bessel y sus aplicaciones.

**Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*Sería menester haber olvidado completamente la historia de la ciencia para no recordar que el deseo de conocer la naturaleza ha tenido la influencia más constante y más afortunada sobre el desarrollo de las matemáticas.*

*En primer lugar, el físico nos plantea problemas cuya solución espera de nosotros. Pero proponiéndolos nos ha pagado ampliamente por anticipado el servicio que podemos hacerle si llegamos a resolverlos [Po] p. 99.*

## 5.2. No creo en ti

Ahora nos fijaremos en los fluidos incompresibles que son estacionarios e irrotacionales, es decir, con  $\partial\vec{v}/\partial t = \vec{0}$  y  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ . Como ya hemos visto, la “irrotacionalidad” corresponde en cierto modo a la ausencia de remolinos. Creerse que esta situación representa la realidad física de los fenómenos que nos son familiares, depende de la fe de cada uno. Lo cierto es que para este tipo de fluidos se pueden obtener algunos resultados matemáticos y algunas explicaciones cualitativas.

Por (5.3), los fluidos irrotacionales deben cumplir  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla\|\vec{v}\|^2$ , y si además son estacionarios la primera de las ecuaciones de Euler (5.2) requiere  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla(p/\rho + \phi)$ . Por tanto, salvo constantes la presión es

$$p = -\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2 - \rho\phi.$$

Éste es un caso particular del Teorema de Bernoulli en el que no sólo se tiene que la cantidad allí considerada es constante a lo largo de las trayectorias, sino en todos los puntos de fluido (que suponemos conexo). Según esto, la primera de las ecuaciones de Euler equivale a la determinación de la presión y por tanto sólo queda la ecuación de continuidad, a la que hay que añadir que el fluido es irrotacional y que no cambia con el tiempo (es estacionario).

La gran ventaja del nuevo modelo es que es lineal.

### Diccionario:

- Fluido estacionario e irrotacional  $\longrightarrow \vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ ,  $\text{div } \vec{v} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ .

Pasemos a ver ahora un curso de Variable Compleja en menos de diez líneas. Consideremos una función  $f$  que pasa números complejos a números complejos. Digamos que  $f$  es derivable en  $z_0$ , en el sentido de que existe el límite  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(z_0 + h) - f(z_0))/h$  con  $h$  complejo. A las funciones derivables complejas se les llama *funciones holomorfas*. Si separamos  $f(x + iy)$  en sus partes real e imaginaria, que suponemos  $C^1$ , y derivamos aplicando la regla de la cadena derivando con respecto a  $x$  e  $y$ ,

$$f(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y) \Rightarrow f' = \frac{\partial a}{\partial x} + i\frac{\partial b}{\partial x}, \quad if' = \frac{\partial a}{\partial y} + i\frac{\partial b}{\partial y}.$$

Despejando  $f'$  e igualando, se deducen las llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

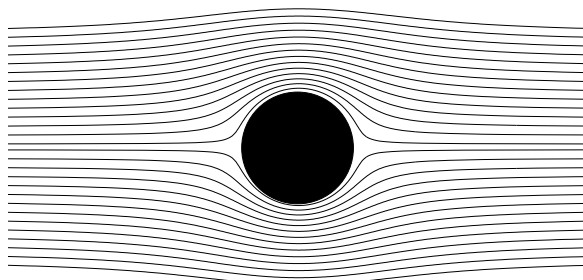
$$\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} = 0.$$

De forma que sin comerlo ni beberlo, hemos probado el siguiente resultado:

**Proposición 5.4.** Sea  $f(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y)$  una función holomorfa, entonces  $\vec{v}(x, y, z) = (a(x, y), -b(x, y), 0) = (\operatorname{Re} \bar{f}, \operatorname{Im} \bar{f}, 0)$  satisface  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ .

Estos campos de velocidades corresponden a fluidos “bidimensionales” en el sentido de que la componente  $z$  no participa en el resultado y las partículas de fluido se desplazan en capas horizontales. El resultado anterior permite establecer una correspondencia biyectiva entre funciones holomorfas y fluidos estacionarios irrotacionales bidimensionales [Va 1].

Veamos un ejemplo interesante. Supongamos una corriente de aire que actúa sobre un cilindro de radio uno de manera que en un corte transversal vemos que el aire se mueve en la dirección positiva del eje  $X$  tropezando con el círculo unidad



Es razonable pensar que el aire lejos del círculo no se ve afectado por él, digamos  $\vec{v} \rightarrow (1, 0, 0)$  si  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ . Como habíamos visto, la condición de contorno natural es que el viento resbale en la frontera, de modo que  $\vec{v}$  es tangente a la circunferencia unidad en cada punto de ella. Si encontramos una función holomorfa en  $|z| > 1 - \epsilon$  con  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$  de forma que  $\overline{f(z)}$  defina un número complejo tangente a la circunferencia unidad para cada  $|z| = 1$ , tendremos “la solución”. Tal función es  $f(z) = 1 - z^{-2}$ . Nótese que  $|z| = 1 \Rightarrow \overline{f(z)} = 1 - \bar{z}^{-2} = 1 - z^2$  y con un dibujo se ve que  $1 - z^2$  y  $z$  son perpendiculares. Por tanto

$$\vec{v}(x, y, z) = (\operatorname{Re} \bar{f}, \operatorname{Im} \bar{f}, 0) = \left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, 0\right).$$

En cierto modo se puede probar que ésta es “la solución”, la única solución, siempre que supongamos que no hay circulación de aire alrededor del círculo (para el caso en que hay circulación, véase [Va 1]).

Que  $\overline{f(z(t))}$  sea tangente a la curva determinada por  $z(t)$  equivale a que  $f(z(t))z'(t)$  sea real (dibújense los números complejos). Escribiendo  $z(t) = g(w(t))$  se tiene que  $(f \circ g)(w(t))g(w(t))w'(t)$  es real, y por tanto  $\overline{(f \circ g)(w(t))g(w(t))}$  es tangente a la curva determinada por  $w(t) = g^{-1}(z(t))$ . Esto permite resolver el problema anterior para obstáculos cuya frontera es una curva diferente de la circunferencia unidad pero relacionada

con ella mediante una función holomorfa con inversa holomorfa. Según un conocido teorema de Riemann, todas las curvas regulares se pueden obtener de esta manera.

Recuérdese que las trayectorias asociadas al campo de velocidades son las soluciones del sistema autónomo  $d\vec{x}/dt = \vec{v}$ . También las funciones holomorfas nos ayudan a calcularlas.

**Proposición 5.5.** Sea  $\vec{v} = (Re \bar{f}, Im \bar{f}, 0)$  y  $F$  una función holomorfa tal que  $F' = f$ , entonces las trayectorias cumplen  $Im F(x(t), y(t)) = cte$ .

DEM.: Sea  $f = a + ib$  y  $F = A + iB$ . Derivando  $F = F(x + iy)$  con respecto a  $x$  e  $y$ , se tiene  $\partial B/\partial x = b$ ,  $\partial B/\partial y = a$ . Así pues

$$\left. \begin{array}{l} dx/dt = a \\ dy/dt = -b \end{array} \right\} \Rightarrow b \frac{dx}{dt} + a \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Por la regla de la cadena esto implica  $B = B(x(t), y(t)) = cte$ . ■

Consideremos como antes una corriente de aire con velocidad en el infinito  $\vec{v} = (1, 0, 0)$  que choca en el plano  $XY$  con un obstáculo, no necesariamente circular, representado por un dominio simplemente conexo (sin agujeros)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  con frontera regular. Como habíamos visto, las partículas de aire ejercen una fuerza sobre el obstáculo, el empuje, cuya proyección en el plano  $XY$  (sus dos primeras coordenadas) es

$$\vec{F} = \left( - \int_{\partial\Omega} (p, 0) \cdot \vec{dl}, - \int_{\partial\Omega} (0, p) \cdot \vec{dl} \right).$$

Si  $C \subset \mathbb{R}^2$  es una curva cerrada que rodea al objeto se llama *circulación* a la integral de la velocidad a lo largo de  $C$  recorrida en sentido positivo, que denotaremos con  $\Gamma$ . El siguiente resultado implica que  $\Gamma$  está íntimamente relacionado con la fuerza de empuje.

**Teorema 5.6 (Kutta-Zhukovskii).** Bajo las hipótesis anteriores la fuerza de empuje es

$$\vec{F} = (0, -\rho\Gamma).$$

DEM.: Escribiendo como antes  $f = a + ib$ , se tiene  $p = -\frac{1}{2}\rho(a^2 + b^2) + cte$ . Si  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  es una parametrización de  $\partial\Omega$ ,  $(dy, -dx)$  es el vector normal “infinitesimal”, y se tiene

$$\vec{F} = \left( \frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} (a^2 + b^2) dy, -\frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} (a^2 + b^2) dy \right).$$

En  $\partial\Omega$  se cumple  $-b/a = dy/dx$  porque la velocidad debe ser paralela al vector tangente. Por tanto

$$-2a^2 dy - 2abdx = -2b^2 dx - 2abdy = 0.$$

Añadiendo estas cantidades a las integrales anteriores

$$(5.6) \quad \vec{F} = \frac{\rho}{2} \left( \int_{\partial\Omega} (b^2 - a^2) dy - 2abdx, \int_{\partial\Omega} 2abdy + (b^2 - a^2) dx \right).$$

Si  $h(z) = i(a + ib)^2$ , entonces los campos que se integran en cada una de las coordenadas de (5.6) son  $(\operatorname{Re} \bar{h}, \operatorname{Im} \bar{h})$   $(\operatorname{Re} i\bar{h}, \operatorname{Im} i\bar{h})$ ; en particular son irrotacionales y, por el teorema de Stokes (o de Green), da igual integrar en  $\partial\Omega$ , que en una circunferencia  $C$  de radio  $R$  grande.

Un resultado de Variable Compleja (el desarrollo de Laurent) asegura que para  $|z| \geq R$  se tiene  $f(z) \sim a_0 + a_1/z$ , donde el símbolo “ $\sim$ ” indica que ambos miembros son iguales salvo añadir una cantidad menor en módulo que  $\text{cte}R^{-2}$ . La condición  $f(\infty) = 1$  implica  $a_0 = 1$ . Si  $a_1 = \alpha + i\beta$ , operando se tiene que si  $(x, y) \in C$

$$(5.7) \quad a \sim 1 + (\alpha x + \beta y)/R^2 \quad \text{y} \quad b \sim (\beta x - \alpha y)/R^2.$$

De aquí,

$$b^2 - a^2 \sim -a^2 \sim -1 - 2(\alpha x + \beta y)/R^2 \quad \text{y} \quad 2ab \sim 2(\beta x - \alpha y)/R^2.$$

Sustituyendo estas aproximaciones en (5.6) y tomando  $R \rightarrow \infty$ , el término de error desaparece, esto es,

$$\vec{F} = \frac{\rho}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} (I_1, I_2)$$

con  $I_1$  e  $I_2$  las integrales

$$\int_C \left( -1 - \frac{2}{R^2}(\alpha x + \beta y) \right) dy - \frac{2}{R^2}(\beta x - \alpha y) dx, \int_C \frac{2}{R^2}(\beta x - \alpha y) dy + \left( -1 - \frac{2}{R^2}(\alpha x + \beta y) \right) dx.$$

La parametrización  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  conduce a  $I_1 = -4\pi\alpha$ ,  $I_2 = 4\pi\beta$ . Por tanto

$$(5.8) \quad \vec{F} = (-2\pi\alpha\rho, 2\pi\beta\rho).$$

Por la irrotacionalidad y la relación  $-b/a = dy/dx$  en la frontera, se siguen las igualdades siguientes:

$$\int_C bdx + ady = \int_{\partial\Omega} bdx + ady = 0.$$

Sustituyendo (5.7) en la primera integral y tomando  $R \rightarrow \infty$ , se sigue  $\alpha = 0$ . Así que

$a \sim 1 + \beta y/R^2$ ,  $b \sim \beta x/R^2$ . De esto y la definición de circulación,

$$\Gamma = \int_C a dx - b dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C (1 + \beta y/R^2) dx - \beta x/R^2 dy = -2\pi\beta.$$

Finalmente, sustituyendo en (5.8) se tiene el resultado. ■

Ahora podríamos emocionarnos y creer, como se puede leer en varios lugares, que ya sabemos por qué los aviones pueden volar: la fuerza de empuje es la sustentación que tira de ellos hacia arriba compensando la fuerza del peso. Pero lo cierto es que este resultado plantea más preguntas que respuestas [Hu-Ma]. Por ejemplo, que la primera coordenada de  $\vec{F}$  sea nula indica que no hay *fuerza de arrastre*, es decir, que al soplar un objeto no lo podemos mover. Esto no sólo es poco intuitivo sino una flagrante mentira. Nótese que por ejemplo en el caso anteriormente estudiado del círculo, la velocidad es igual en módulo por delante que por detrás, lo que de acuerdo con el Teorema de Bernoulli conlleva presiones iguales. Pero todos sabemos que cuando el aire o el agua inciden sobre un objeto se forma una estela en la parte trasera del objeto, allí las partículas de fluido pierden velocidad y se forman remolinos. No podremos explicar estos fenómenos adecuadamente sin tener en cuenta una característica importante que ha sido omitida en nuestro análisis: la viscosidad.

Aparte de la demoledora realidad, se puede dar un argumento teórico que muestra que no podemos aferrarnos demasiado al modelo. En el caso tridimensional, con un obstáculo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  acotado y regular, se pueden utilizar técnicas de ecuaciones en derivadas parciales para probar que  $\vec{v}$  es constante salvo términos acotados por  $\text{cte } R^{-3}$ , con  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Un razonamiento parecido al empleado en la demostración del resultado anterior, prueba matemáticamente que el empuje es nulo (en este caso no hay términos de orden  $R^{-1}$ ). Pero si la fuerza de empuje fuera nula, ningún avión tridimensional podría volar. Ésta es la paradoja de d’Alambert [Ma-Pu].





## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Indicar la relación entre las funciones holomorfas y los fluidos incompresibles irrotacionales estacionarios. b) Enunciar el Teorema de Kutta-Zhukovskii.

2) Según el principio de los vasos comunicantes, si un líquido está en equilibrio en un tubo abierto en forma de “U”, siempre el nivel de ambos coincide. Deducir esto del teorema de Bernoulli para fluidos irrotacionales empleando que la presión a ras de agua es la atmosférica. Los primeros barómetros de Torricelli eran esencialmente tubos de esta forma con un extremo tapado y no cumplía el principio de vasos comunicantes (la diferencia de alturas se relacionaba con la presión atmosférica). Tratar de explicar la paradoja.

3) Hallar el campo de velocidades correspondiente a la función holomorfa en el semi-plano superior  $f(z) = (z - 1)^{-2}$ ; indicando también la forma de las trayectorias.

4) Comprobar que  $\vec{v} = (y/(x^2 + y^2), -x/(x^2 + y^2), 0)$  corresponde al campo de velocidades de un fluido irrotacional estacionario, y sin embargo sus trayectorias son circunferencias centradas en el origen y a lo largo de cualquiera de ellas  $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$ . ¿Cómo es posible que haya un remolino?

5) En el ejemplo mencionado en esta sección de un cilindro circular inmerso en un chorro de aire, hallar explícitamente las funciones  $x = f(y)$  cuyas gráficas dan la forma de las trayectorias en el primer cuadrante.

6) Si el cilindro circular inmerso en un chorro de aire con velocidad en el infinito  $(1, 0, 0)$  es de radio  $R$  en vez de 1, hallar el campo de velocidades.

7) Generalizar todavía más el problema anterior resolviéndolo cuando la velocidad en el infinito es  $(v_0, 0, 0)$  con  $v_0 > 0$ . Indicar geoméricamente cuál sería la solución si la velocidad en el infinito fuera  $(v_{01}, v_{02}, 0)$  con  $\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2} = v_0$ , y hallar la función holomorfa que le corresponde.

8) Un chorro de líquido cae desde el reposo y sin presión (sólo la atmosférica) desde una altura de 1 m. Calcular la velocidad de las partículas de fluido cuando llegan abajo. Explicar por qué la incompresibilidad implica que si el chorro no se disgrega en gotas, se debe ir estrechando.

9) Sea la función holomorfa en  $|z| > 1$  dada por  $f(z) = 1 - z^{-2} - iz^{-1}$ . Comprobar que el campo de velocidades correspondiente es tangente a la circunferencia unidad en cada punto de ella y su circulación es no nula alrededor de una curva que la rodee. Hallar el empuje que sufriría el cilindro circular correspondiente según el Teorema de Kutta-Zhukovskii, indicando si es hacia arriba (si se elevaría) o hacia abajo (si descendería).

10) Comprobar que las ecuaciones  $\text{div } \vec{v} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  para  $\vec{v} = (a(x, y), -b(x, y), 0)$  coinciden con las ecuaciones de Cauchy-Riemann para  $f(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y)$ .

11) Demostrar que  $\text{div}$  y  $\text{rot}$  son operadores lineales, concluyendo que si  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son campos vectoriales que corresponden a fluidos irrotacionales y estacionarios, entonces  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$  también lo es.

SECCIÓN 5.2

## Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos (el precio de esta fotocopia)

De la sección:

- Aplicaciones de la Variable Compleja en Física.

Generales:

- Econometría.

### Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

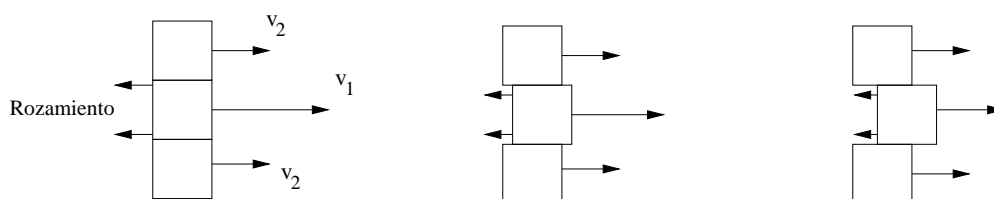
*De este modo, en el estudio de las funciones de variables complejas, el analista, al lado de la imagen geométrica que es su instrumento habitual, encuentra muchas imágenes físicas que puede utilizar con el mismo éxito.*

*Gracias a estas imágenes, puede ver de una ojeada lo que la deducción pura no le mostraría sino sucesivamente. Reúne así los elementos dispersos de la solución y, por una especie de intuición, adivina antes de poder demostrar. [Po] p. 102.*

### 5.3. Mares de hiel

Pensemos en el siguiente experimento que no es conveniente hacer ni siquiera en presencia de un adulto: Tomamos dos vasos idénticos, uno lleno de miel y otro de agua, y los volcamos repentinamente. Hay una gran diferencia en ambos casos. El agua cae enseguida mientras que a la miel le cuesta más salir del recipiente. La explicación no está en la densidad, de hecho la miel es algo más densa y al pesar más podríamos pensar que cae más rápidamente (aunque Galileo y nuestro profesor de Física se iban a echar las manos a la cabeza). Parece que la razón es que la miel se pega a las paredes del recipiente, y terminado el experimento hay que fregarlo bien. Pero esto no explica por qué la miel de la parte central también cae despacio. Hay una especie de rozamiento de la miel consigo misma que impide que partículas rápidas y lentas sean vecinas.

Según el modelo introducido para obtener las ecuaciones de Euler, suponiendo el fluido dividido en pequeños cubitos, sobre cada uno de ellos actúan unas fuerzas de presión perpendiculares a las caras. Ahora queremos introducir una fuerza de rozamiento que frene a un cubito si los adyacentes van mucho más despacio. Esto es como decir que los elementos de fluido son pegajosos, *viscosos*.



Es natural suponer que este rozamiento será proporcional a la tasa de variación de la velocidad, es decir, que será 100 veces más energético tratando de evitar una variación de  $7m/s$  con respecto a los elementos adyacentes, que una de  $0'07m/s$ . La fuerza de rozamiento actuará en la superficie de cada elemento de fluido ya que es ahí donde roza con otros elementos. Según lo dicho parece sensato considerar en nuestro balance de fuerzas, además de las de presión y las externas, otra dada por (véase en [Va 1] una deducción a partir de primeros principios)

$$\vec{F}_3 = \nu \int_{\partial V} \nabla \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

donde  $\nu$  es una constante positiva llamada *viscosidad*, que depende del apego que tengan las partículas del fluido a que su velocidad no desentone con las de las partículas de los alrededores. La notación empleada significa que el gradiente se aplica a cada coordenada y se integra el resultado. Lo que estamos diciendo es que el rozamiento es proporcional a la

suma (integral) de todas las variaciones de la velocidad. La constante de proporcionalidad es la viscosidad y ésta es más de mil veces mayor en la miel que en el agua, por eso su caída se ve en los instantes iniciales sensiblemente ralentizada.

El modelo de fluido correspondiente a las ecuaciones de Euler no contempla esta fuerza, lo cual da cuenta de algunas de sus consecuencias poco intuitivas e irreales. Parafraseando a J. von Neumann [**Fe-Le-Sa**], utilizar exclusivamente las ecuaciones de Euler equivale a estudiar el *agua seca*. La viscosidad está detrás de los fenómenos turbulentos que parecen continuamente en Aerodinámica e Hidrodinámica. Sin ella, en la mayoría de los casos sólo obtendremos explicaciones cualitativas

Diccionario:

- Fuerza debida a la viscosidad  $\longrightarrow \vec{F}_3 = \nu \int_{\partial V} \nabla \vec{v} \cdot d\vec{S}$ .
- Equilibrio de fuerzas  $\longrightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ .

Ya sabíamos que  $\vec{F} = \int_V \rho (\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v})$ ,  $\vec{F}_1 = - \int_V \nabla p$  y  $\vec{F}_2 = - \int_V \rho \nabla \phi$ . Ahora, por el teorema de la divergencia

$$\vec{F}_3 = \nu \int_V \operatorname{div} \nabla \vec{v} = \nu \int_V \Delta \vec{v}.$$

El equilibrio de fuerzas  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  junto con la ecuación de continuidad lleva ahora a las *ecuaciones de Navier-Stokes* (para fluidos incompresibles)

$$(5.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \rho^{-1} \nabla p - \nu \Delta \vec{v} + \nabla \phi = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

En las ecuaciones de Euler la condición de frontera natural era que el fluido se deslizase por el obstáculo o la frontera, es decir, que no hubiera componente normal de la velocidad. Ahora, como suponemos que las partículas son “pegajosas”, en los puntos de contacto con un obstáculo o frontera inmóviles, se debe tener  $\vec{v} = \vec{0}$  (*condición de no deslizamiento*). Los y las que se afeiten pueden hacerse una idea de ello, notando que los pequeños vellos muchas veces se rebelan al intentar que el agua del grifo los arrastre.

Si el estudio matemático de las ecuaciones de Euler no está completado, en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes la situación es mucho más primaria. De hecho pertenece a los *Problemas del Milenio* del Clay Mathematics Institute, concediéndose un premio de

un millón de dólares para el que sea capaz de resolver en sentido afirmativo o negativo los problemas básicos de existencia y regularidad de soluciones. Además las ecuaciones de Navier-Stokes son especialmente refractarias a los métodos numéricos, ya que la fenomenología al uso sugiere que hay una fina “capa límite”, de la que hablaremos más adelante, donde el campo de velocidades es casi discontinuo (véase un ejemplo sencillo e ilustrativo en [Va 1] §14.2).

Para ver cómo funcionan las ecuaciones de Navier-Stokes en relación con las de Euler, pensemos en una situación idealizada (demasiado) del mar cuando sopla un viento uniforme paralelo a la costa. Supongamos que esto hace que todas las partículas de la superficie, representada por  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , tengan inicialmente velocidad  $(v_0, 0)$ , y queremos saber su evolución cuando el viento deja de soplar de pronto. La simetría del problema sugiere buscar una solución del tipo  $\vec{v}(x, y, t) = (u(y, t), 0)$ . Se puede comprobar que la única solución de esta forma de las ecuaciones de Euler (5.9) con  $\vec{v}$  y  $p$  acotadas y regulares, bajo la condición inicial  $\vec{v}(x, y, 0) = (v_0, 0)$  y  $\vec{v} \cdot \vec{n}(x, 0, t) = 0$ ; es la solución constante  $\vec{v}(x, y, t) = (v_0, 0)$ . Es decir, como no hay rozamiento las partículas siguen su curso sin molestarse unas a otras y sin perder velocidad. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, la condición natural de no deslizamiento es que la costa sujete al mar, y el rozamiento se irá transmitiendo de manera que la velocidad pasa gradualmente de cero en la costa a  $v_0$  en el infinito de forma cada vez más suave. Por efecto del roce con la costa, en ausencia de viento, el mar tiende a pararse.

**Proposición 5.7.** *La única solución de la forma  $\vec{v}(x, y, t) = (u(y, t), 0)$  de las ecuaciones de Navier-Stokes (5.9) en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  con  $\phi = 0$  y con  $\vec{v}$  y  $p$  acotadas y regulares, verificando las condiciones de contorno*

$$\vec{v}(x, y, 0) = (v_0, 0), \quad \vec{v}(x, 0, t) = (0, 0), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \vec{v}(x, y, t) = (v_0, 0),$$

para  $y, t > 0$ ; es

$$\vec{v}(x, y, t) = \left( \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-v^2} dv, 0 \right).$$

DEM.: Desarrollando (5.9), se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Por la segunda ecuación,  $p$  sólo depende de  $x$  y  $t$ . Como  $\partial u / \partial t - \nu \partial^2 u / \partial y^2$  sólo depende

de  $y$  y  $t$ , la primera implica que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho f(t).$$

Integrando,  $p(x, t) = -\rho f(t)x + g(t)$ , y para que sea acotada, necesariamente  $f \equiv 0$ . De forma que  $u$  satisface una “ecuación del calor”

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(y, 0) = v_0, \quad u(0, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(y, t) = v_0,$$

con  $t, y > 0$ . Es fácil comprobar que la función del enunciado resuelve este problema (compárese con [Dy-Mc] p.109). La unicidad se sigue por un principio del máximo. ■

Nótese que cuando  $y \rightarrow \infty$ ,  $t > 0$ ,  $\vec{v}(x, y, t)$  tiende a  $(v_0, 0)$  con rapidez exponencial ( $\int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ , [Gr-Ry] 3.323.2). Apenas hay diferencia con la solución de las ecuaciones de Euler si  $y/\sqrt{\nu t} > \text{cte}$ . Es decir, en tiempo  $t$ , el roce de la costa sólo habrá afectado sensiblemente a la capa  $0 < y \leq \text{cte}\sqrt{\nu t}$ .

La no linealidad de las ecuaciones (5.9) implica que hay que tener cuidado al tratar de hacer experimentos a escala: Un avión comercial de 50 metros de longitud a  $900 \text{ km/h}$  no volará igual que una reproducción de medio metro en un túnel de viento con aire a  $9 \text{ km/h}$ . El siguiente sencillo pero importante resultado, cuya prueba se reduce a un cálculo trivial, indica cuál es la ley de escala.

**Lema 5.8** (Reynolds 1883). *Si  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  satisface (5.9), entonces dadas constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , el campo de velocidades  $\beta^{-1}\vec{v}(\alpha\vec{x}, \alpha t/\beta)$  también verifica (5.9) siempre que  $\nu$  se sustituya por  $\nu\alpha^{-1}\beta^{-1}$ , y  $\phi(\vec{x})$  y  $\rho^{-1}p(\vec{x}, t)$  por  $\beta^{-2}\phi(\alpha\vec{x})$  y  $\beta^{-2}\rho^{-1}p(\alpha\vec{x}, \alpha t/\beta)$ .*

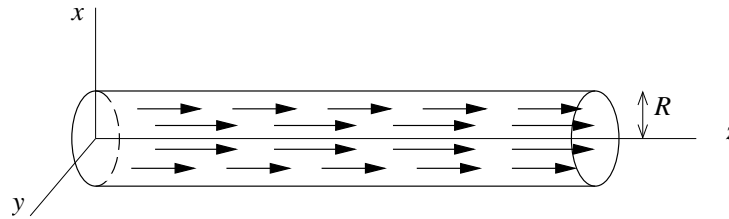
De esta forma, si queremos estudiar un objeto de longitud  $L$  inmerso en un fluido a velocidad  $V$ , podemos reducirlo todo a escala unitaria con  $\alpha = L$ ,  $\beta = V$  (nótese que  $\|\vec{x}\| \approx 1 \Rightarrow \|\alpha\vec{x}\| \approx L$  y  $\|\vec{v}\| \approx V \Rightarrow \|\beta^{-1}\vec{x}\| \approx 1$ ). A la cantidad adimensional  $Re = \nu^{-1}LV$ , se le llama *número de Reynolds*. Según la teoría de la capa límite de Prandtl (lo de “teoría” es en gran medida una aspiración), cuando el número de Reynolds es grande, entonces la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes se comporta como la de las ecuaciones de Euler fuera de una delgada capa de espesor aproximado  $Re^{-1/2}$ . Esta capa es responsable de la generación de turbulencia y vorticidad [Hu-Ma], [Va 1].

Para terminar, veamos qué nos dicen las ecuaciones de Navier-Stokes acerca del flujo estacionario de un fluido a través de una tubería. En el caso de las ecuaciones de Euler, vimos que las variaciones de presión estaban asociadas a estrechamientos de la tubería,

pero ahora será necesaria una variación de presión para que haya flujo en ausencia de fuerzas externas. La razón es el “rozamiento” de las paredes.

Digamos que la tubería se extiende a lo largo del eje  $Z$  y es el cilindro  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Suponemos el flujo estacionario y que la velocidad sigue la dirección de la tubería. Esto, la simetría del problema y la adherencia en las paredes, sugieren

$$(5.10) \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = (0, 0, u(\sqrt{x^2 + y^2})) \quad \text{con } u(R) = 0.$$



**Teorema 5.9 (Poiseuille 1840).** Las soluciones de la forma (5.10) de las ecuaciones de Navier-Stokes (5.9) con  $\phi = 0$ , tienen

$$u(r) = \frac{\gamma}{4\nu\rho}(R^2 - r^2)$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante que indica la caída de presión por unidad de longitud, esto es,  $p = -\gamma z + \text{cte}$ .

DEM.: La ecuación de continuidad se cumple trivialmente, mientras que la primera ecuación implica, coordenada a coordenada,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta f \quad \text{con } f(x, y) = u(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

De aquí se deduce que  $p$  no depende de  $x$  ni de  $y$ . Como  $\Delta f$  es función de  $x$  e  $y$ , mientras que  $\rho^{-1}\partial p/\partial z$  lo es a lo más de  $z$ , se deduce que  $\partial p/\partial z$  es una constante, que llamaremos  $-\gamma$ . Como se afirma en el enunciado,  $p = -\gamma z$  salvo constantes. Por otra parte, tras unos cálculos, o inmediatamente usando la fórmula del laplaciano en polares ([Va 1] Apéndice II, [Gr-Ry] 10.612.5)

$$\Delta f(x, y) = r^{-1}(ru')'(r) \quad \text{con } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Al resolver la ecuación diferencial  $0 = \rho^{-1}\gamma + \nu r^{-1}(ru')'$  se obtiene la solución general

$$u(r) = -\frac{\gamma}{4\nu\rho}r^2 + A \log |r| + B.$$

Para que  $\vec{v}$  sea diferenciable en  $x = y = 0$ , el centro de la tubería, se debe tener  $A = 0$ , mientras que  $u(R) = 0$  implica  $B = \gamma R^2 / (4\nu\rho)$ . ■

Como es intuitivo, la velocidad es mayor en el centro de la tubería porque es la zona más alejada de los bordes, donde se produce el rozamiento. Fijada la velocidad central  $u(0)$ , si  $\nu$  o  $\rho$  crecen,  $\gamma$  también debe crecer. Es decir, necesitamos hacer más presión para desplazar por una tubería fluidos más viscosos y densos. Si  $R$  disminuye, el centro estará más cerca de los bordes, con lo cual no sólo disminuirá la sección, sino que aumentará el rozamiento, y con el mismo esfuerzo el flujo será menor. Concretamente, sea  $Q$  el flujo a través de cualquier sección transversal, esto es,  $Q = \int_D \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$  con  $D$  el disco  $\{x^2 + y^2 \leq R, z = \text{cte}\}$ . Entonces con la notación anterior, un cálculo prueba:

**Corolario 5.10 (Ley de la cuarta potencia).** *El flujo viene dado por*

$$Q = \frac{\pi\gamma}{8\nu} R^4.$$

Podemos pensar en términos médicos las consecuencias de la dependencia altamente no lineal en  $R$ . Si queremos conservar el flujo de sangre a través de una arteria que se ha estrechado a la mitad (*¿colesterol?*) el gradiente de presión  $\gamma$  debe multiplicarse por 16, lo que producirá una notable hipertensión [Mz]. El ejemplo no es históricamente anecdótico, ya que Poiseuille desarrolló sus investigaciones para entender el flujo de la sangre a través de los capilares.



## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Indicar en qué consiste la condición de no deslizamiento y por qué es natural. b) Definir, al menos intuitivamente, la viscosidad.

2) Queremos hacer pruebas a escala para construir una avioneta de  $10\text{ m}$  de longitud que vaya a  $300\text{ km/h}$ . En nuestro túnel de viento podemos emplear un gas enrarecido cuya viscosidad es el 25% de la del aire, y hacer que se mueva hasta a  $150\text{ km/h}$ . Estimar la longitud del modelo a escala de la avioneta que podríamos usar.

3) Comprobar que el campo de velocidades  $(\int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-v^2} dv, 0, 0)$  realmente satisface las ecuaciones de Navier-Stokes con  $p = \phi = 0$ .

4) Buscar el análogo de la ley de Poiseuille para un fluido que fluye entre los planos  $z = 0$  y  $z = \delta$  de forma que la velocidad sea constante en cada plano intermedio paralelo a ellos, y que además sea siempre paralela al eje  $OX$ .

5) Si hacemos pasar un chorro a presión por una tubería cilíndrica y fotografiamos el momento en el que sale, hallar qué forma tendría teóricamente usando la ley de Poiseuille.

6) En ausencia de gravedad, un astronauta puede beberse su lata de refresco ( $330\text{ ml}$ ) en dos minutos aspirando por una pajita. Suponiendo aplicable la ley de la cuarta potencia, calcular cuánto tiempo tardaría si aspirarse con igual presión pero el radio de la pajita se redujera a la mitad.

7) En ausencia de viscosidad habíamos probado la fórmula  $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2(S_1^2 S_2^{-2} - 1)$  cuando una tubería se estrecha. Tratar de argumentar, al menos intuitivamente, por qué tipo de desigualdad (mayor o menor) habría que reemplazar la igualdad cuando hay viscosidad.

8) Estudiar en qué cambia la ley de Poiseuille si se supone que  $\phi$  es el potencial gravitatorio  $gz$  y  $\vec{v}$  sigue siendo de la forma  $(0, 0, u(\sqrt{x^2 + y^2}))$ . Estudiar también los cambios si el tubo se traslada a velocidad  $v_0$  por el eje  $OZ$ , de forma que la condición de no deslizamiento pase a ser  $u(R) = v_0$ .

9) Aparentemente, según la ley de la cuarta potencia, si  $\nu \rightarrow 0$  el flujo tiende a infinito. Esto es físicamente ilógico e incongruente con el hecho de que formalmente las ecuaciones de Euler se obtienen a partir de las de Navier-Stokes cuando  $\nu = 0$ . Explicar esta paradoja.

10) Comprobar que si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es radial, esto es,  $f(x, y) = u(r)$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; entonces  $\Delta f = r^{-1}(ru)'$ .

11) Probar que la vorticidad  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$  verifica  $\partial\vec{\omega}/\partial t = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) + \nu\Delta\vec{\omega}$ .

## SECCIÓN 5.3

**Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos** (el precio de esta fotocopia)De la sección:

- El movimiento de las olas.
- Resistencia del aire, ley de Stokes.
- Modelos de circulación de la sangre.

Generales:

- Geometría proyectiva y visión artificial.

**Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*¿Cómo es necesario tratar las ecuaciones de la física matemática? ¿Debemos simplemente deducir de ellas todas las ecuaciones y considerarlas como realidades intangibles? Lejos de ello; lo que deben enseñarnos, sobre todo, es lo que se puede y se debe cambiar en ellas. Así es como obtendremos de las mismas algo útil. [Po] p. 98.*

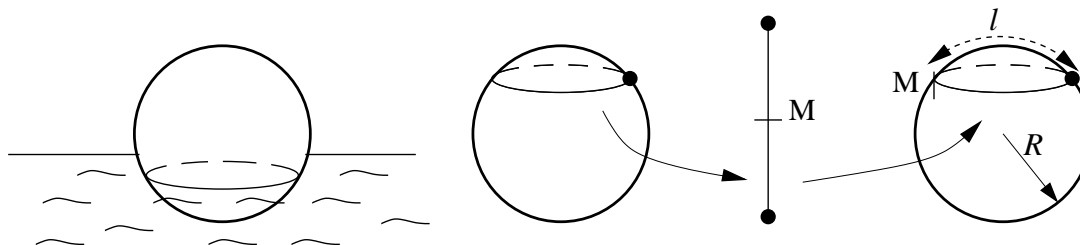
## ¡Eureka!

### Material:

- Una pelota pequeña.
- Un cazo con agua.
- Una regla.
- Un cordel.
- Un rotulador.
- Un peso de cocina.
- Un calibre o nonio (opcional).

Dejemos la pelota en el cazo de agua y marquemos la línea de flotación con el rotulador (para ello será conveniente sujetar la pelota con la mano sin hundirla y quizá marcar sólo algunos puntos que pueden unirse más fácilmente con ella fuera del agua).

En la circunferencia que conforma el paralelo determinado por la línea de flotación marquemos dos puntos diametralmente opuestos. Para ello podemos simplemente extender el cordel sobre ella, desenrollarlo, marcar el punto medio y volverlo a enrollar.



Entre estos dos puntos situemos el cordel lo más tenso posible de manera que describa un arco de meridiano que pase por la parte antes sumergida y midámoslo. Midamos también el radio de la pelota (con el nonio esto es trivial, también se puede utilizar el cordel y a partir de la longitud del meridiano hallar el radio). Los valores para la longitud de arco y el radio correspondientes a un experimento real\* fueron  $l = 8'9 \text{ cm}$  y  $R = 2'8 \text{ cm}$ .

---

\* *N. del A.* Empleé una pelota de goma, parecida a las que se les suelen dar a los perros, algo menor que una de tenis. Marcar la línea de flotación fue más dificultoso de lo previsto. Señalé algunos puntos y si al volver a poner la pelota en el cazo no quedaban a ras de agua los corregía. Después completé aproximadamente la circunferencia ayudándome de un papel puesto a modo de cucurucho.

Apliquemos ahora la fórmula

$$\frac{4\pi}{3}R^3\left(3 - 2\operatorname{sen}^2\frac{l}{4R}\right)\operatorname{sen}^4\frac{l}{4R}$$

con  $l$  y  $R$  en centímetros (que con los datos citados resulta 47'25). Podemos comprobar utilizando el peso de cocina que esto coincide con bastante precisión con el peso de la pelota en gramos (en nuestro caso  $\approx 45\text{ gr}$ ). Es decir, podemos saber cuánto pesa una bola ligera sin más que examinar cuánto flota.

Explicación: Para que la pelota esté en equilibrio, el empuje debe coincidir en módulo con el peso. Según el Principio de Arquímedes, esto equivale a

$$mg = g \int_V \rho.$$

En el sistema CGS (centímetros, gramos, segundos) la densidad del agua es  $\rho = 1$ , y consecuentemente la fórmula anterior implica que la masa coincide con el volumen. Lo único que hay que hacer es recordar los viejos tiempos de Cálculo II y Cálculo III, comprobando que la integral triple para hallar el volumen del segmento esférico que subtiende un arco de longitud  $l$ , da como resultado la fea fórmula en términos de  $l$  y  $R$  antes enunciada.

## Un soplo de aire

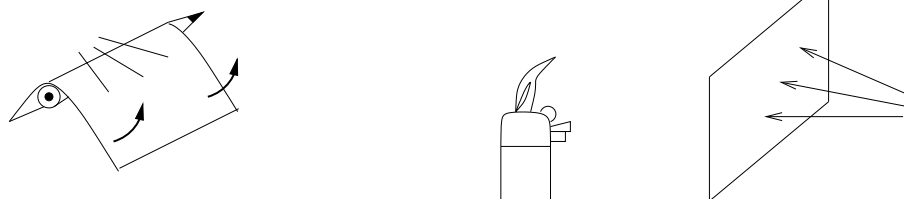
### Material:

- Una servilleta.
- Un lápiz.
- Una tarjeta de visita.
- Un mechero.

Veamos dos sencillas pero sorprendentes experiencias. Para la primera, sujetemos con los dedos la servilleta de papel paralelamente a una de sus aristas, y cerca de ella, a lo largo del lápiz; de manera que el resto de la servilleta caiga ligeramente con respecto a la horizontal por su propio peso.

Si soplamos perpendicularmente al lápiz en la dirección tangencial a la superficie de la servilleta, cabría esperar que ésta cayese todavía más por la fuerza del aire, sin embargo en contra de toda intuición la servilleta asciende levemente.

Para la segunda, pongamos la tarjeta de visita frente a nosotros, a unos 20 *cm*, y el mechero encendido detrás de ella. Cuando soplamos con fuerza contra la tarjeta, la llama del mechero se acerca hacia nosotros. Si variamos la posición del mechero, manteniéndolo siempre detrás de la tarjeta, seguiremos observando una desviación de la llama que contradice lo que cabría esperar.



Explicación: En ambos casos se puede dar una explicación cualitativa por medio del Teorema de Bernoulli. Recuérdese que, según éste, a lo largo de las trayectorias se debe cumplir

$$\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\| + p = \text{cte.}$$

Y bajo la hipótesis de irrotacionalidad, esta constante es independiente de la trayectoria.

En el primer experimento, una mayor velocidad del aire en la cara de arriba genera una depresión que eleva la servilleta. En el segundo experimento, el aire del soplo después de chocar con la tarjeta de visita se dispersa tangencialmente a ésta. La velocidad grande en comparación con las partículas vecinas de la parte de atrás, crea de nuevo una depresión que las aspira hacia adelante.

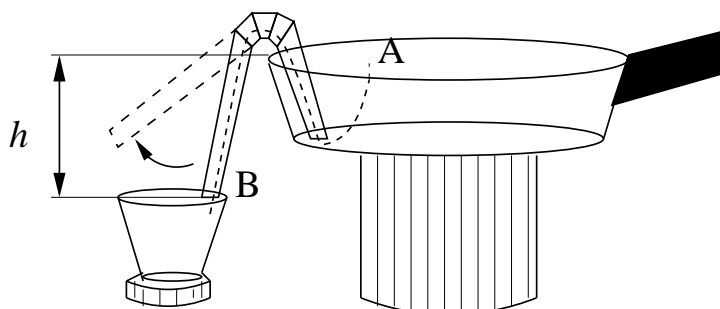
En realidad, como ya hemos mencionado, esta explicación es sólo cualitativa, porque los fenómenos son más complicados, y hay turbulencias que sólo se podrían entender teniendo en cuenta la viscosidad del aire.

## Rebosa el recipiente

### Material:

- Una sartén lo más amplia posible.
- Una pajita de refresco articulada o un tubo flexible de goma.
- Un reloj con segundero o cronómetro.
- Un vaso.

Llenemos la sartén con agua y pongámosla sobre algún soporte que la mantenga a cierta altura. Adosemos la pajita articulada o el tubo a la sartén de manera que un extremo esté sumergido hasta el fondo y el otro (el más largo) asome por fuera a modo de sifón. Para que no se mueva podemos solicitar la ayuda de alguien o utilizar una pinza que oprima muy poco. Aspirando por la pajita se consigue que el agua comience a salir y caiga en un vaso colocado justo a continuación y de capacidad despreciable en comparación con la de la sartén.

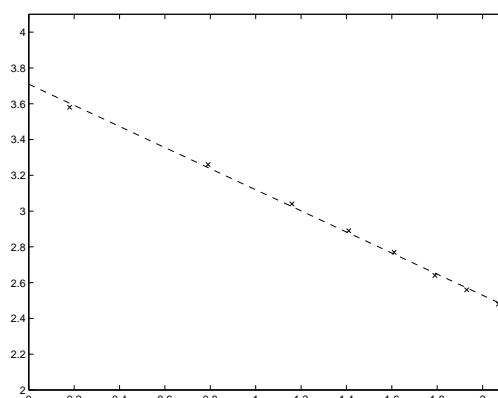


Inclinando la pajita o moviendo el tubo podemos hacer que varíe la diferencia de alturas,  $h$ , entre la superficie del agua de la sartén y el orificio de salida de la pajita. Si con ayuda del reloj (y quizá de una calculadora) hallamos el logaritmo del tiempo  $T$  que tarda en llenarse y rebosar en función del logaritmo de  $h$  para unos cuantos valores, resulta que al representar los puntos correspondientes, éstos se sitúan aproximadamente en una recta cuya pendiente está cercana a  $-1/2$ .

Por ejemplo, en un experimento real se obtuvo la tabla

$\log h \rightarrow$	2'07,	1'93,	1'79,	1'61,	1'41,	1'16,	0'79,	0'18
$\log T \rightarrow$	2'48,	2'56,	2'64,	2'77,	2'89,	3'04,	3'26,	3'58

que está aproximada por la recta  $y = -0'59x + 3'71$  con un error que típicamente es del orden de una centésima.



Explicación: De nuevo apelaremos al Teorema de Bernoulli, ésta vez en un caso que da lugar al llamado *Teorema de Torricelli*.

El agua que está más arriba va empujando a la de debajo, con lo cual es natural suponer que las trayectorias conectan un punto  $A$  situado en la superficie del agua de la sartén, con un punto  $B$  en el orificio de salida. Por la gran capacidad de la sartén podemos suponer que el nivel del agua no se modifica significativamente al llenarse el vaso y se tiene  $v_A = 0$ . Por otra parte, tanto en  $A$  como en  $B$  la presión que actúa es la atmosférica (el líquido no está “comprimido”),  $p_A = p_B = p_{atm}$ . Por el Teorema de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A + \rho g h_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B + \rho g h_B \Rightarrow v_B^2/h = 2g.$$

Con lo cual el agua sale con la misma velocidad que alcanzaría un objeto soltado en caída libre desde altura  $h$  al transformar su energía potencial en cinética (*Teorema de Torricelli*, nótese que  $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$ ). Por otra parte, dicha velocidad es inversamente proporcional al tiempo que tarda en llenarse el vaso (aunque la relación entre velocidad y flujo no es tan fácil como pudiera pensarse porque inicialmente las velocidades no son todas perpendiculares a la sección de la pajita [**Fe-Le-Sa**]). Es decir,  $hT^2 = cte$ , y tomando logaritmos se obtiene que  $\log T$  depende linealmente de  $\log h$  con pendiente  $-1/2$ .

Nótese que experimentalmente, al relacionar  $\log h$  y  $\log T$  hemos obtenido una recta de pendiente  $-0'59$  en lugar del valor teórico  $-0'5$ , esto es, hay un error relativo de algo más del 15%. Es natural algún tipo de error sensible debido a que no consideramos la viscosidad, pero es extraño que la pendiente sea menos que la teórica, ya que la viscosidad debería ralentizar el flujo. El error se reduce a la mitad si descartamos la primera medida (¿error experimental?), pero que sea por defecto en vez de por exceso permanece entre los misterios de los experimentos caseros.



## Direcciones en la red

Nota: Los sitios en la red tienen mucha volatilidad, con lo cual puede ser que algunas de estas direcciones ya no estén activas o que hayan cambiado sus contenidos ostensiblemente.

### Applets

- <http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/>      Contenidos diversos
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>      Curso de Física
- <http://xanadu.math.utah.edu/java/>      Movimiento browniano
- [http://www.ideamas.cl/cursoProb/javaEstat/central\\_limit\\_theorem/clt.html](http://www.ideamas.cl/cursoProb/javaEstat/central_limit_theorem/clt.html)      Teorema central del límite
- [http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/vmunoz/edp.html](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/vmunoz/edp.html)      Ecuaciones de ondas y del calor
- <http://home.ural.ru/~iagsoft/BrachJ2.html>      Braquistocrona
- <http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/chain/chain.htm>      Reacción en cadena
- <http://bartok.ucsc.edu/peter/java/ising/keep/ising.html>      Modelo de Ising
- [http://comp.uark.edu/~jgeabana/mol\\_dyn/KinThI.html](http://comp.uark.edu/~jgeabana/mol_dyn/KinThI.html)      Cinética de gases
- <http://www.isds.duke.edu/sites/java.html>      Probabilidad y estadística
- <http://home.a-city.de/walter.fendt/homepage.htm>      Contenidos diversos

### Páginas

- <http://www.msri.org/publications/sgp/jim/geom/minimal/mainc.html>      Superficie mínimas
- <http://www.phys.virginia.edu/CLASSES/252/home.html>      Curso de Física
- <http://rkb.home.cern.ch/rkb/AN16pp/node1.html>      Análisis de datos
- <http://web.usxchange.net/elmo/jpeg.htm>      Formato JPEG
- <http://www.physics.udel.edu/faculty/macdonald/Course%20Notes.htm#IntroQuantumMechanics>      Curso de Física
- <http://www.rasip.fer.hr/research/compress/algorithms/index.html>      Algoritmos de compresión
- [http://www.adi.uam.es/Docs/Knowledge/Fundamental\\_Theory/theory.html](http://www.adi.uam.es/Docs/Knowledge/Fundamental_Theory/theory.html)      Química cuántica



# Programas

Excusa universal: Estos programas se realizaron rápidamente como una ayuda para algunos cálculos y para representar algunas gráficas. No se ha puesto cuidado en que sean “estructurados” ni especialmente comentados. Su finalidad era el uso personal. Desafortunadamente, por razones tipográficas ha sido necesario suprimir los indentados que preceden a la mayoría de las líneas con lo cual no se reconocen a golpe de vista los saltos en los programas FORTRAN.

---

## Sección: 2.1

**Tipo:** MATLAB

**Descripción:** Aproxima la solución de la ecuación del calor en  $[0, 1]$  con extremos a temperatura cero y dato inicial igual a una función triángulo (Problema 2.1.10).

---

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ECUACIÓN DEL CALOR EN [0,1]
% CON  $U(0,T)=U(1,T)=0$ 
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% toma 40*2 términos de la serie de Fourier
n=[0:1:40];
x=[0:.01:1];
%"vector Fourier"
f=sin(pi*x'*(2*n+1));
%vector de coeficientes
coef=4/pi^2*cos(pi*n)./(2*n+1).^2;
%Dibujo para t=0.001
t=0.001
expo=exp(-(2*n+1).^2*pi^2*t);
u=f*(coef.*expo)';
plot(x,u);
hold on
```

```

%Dibujo para t=0.01
t=0.01
expo=exp(-(2*n+1).^2*pi^2*t);
u=f*(coef.*expo)';
plot(x,u);
hold on
%Dibujo para t=0.1
t=0.1
expo=exp(-(2*n+1).^2*pi^2*t);
u=f*(coef.*expo)';
plot(x,u);
axis([0 1 0 0.5])

```

---

**Sección:** 2.1

**Tipo:** MATLAB

**Descripción:** Aproxima  $\exp(\cos(2\pi*x))$  por su serie de Fourier hasta  $N = 3$ .

---

```

%%%%%%%%%%%%%%
%% APROXIMACIÓN DE FOURIER
%%%%%%%%%%%%%%
x=[0:.009:1];
subplot(1,3,1)
f=exp(cos(2*pi*x));
plot(x,f,'--')
hold on
f1=1.26066+0.565159*2*cos(2*pi*x);
plot(x,f1);
hold off
subplot(1,3,2)
f=exp(cos(2*pi*x));

```

```

plot(x,f,'--')
hold on
f2=1.26066+0.565159*2*cos(2*pi*x)+0.135749*2*cos(4*pi*x);
plot(x,f2);
hold off
subplot(1,3,3)
f=exp(cos(2*pi*x));
plot(x,f,'--')
hold on
f3=1.26066+0.565159*2*cos(2*pi*x)+ ...
0.135749*2*cos(4*pi*x)+0.022169*2*cos(6*pi*x);
plot(x,f3);
hold off
print -eps fouri.eps

```

---

**Sección:** 2.2

**Tipo:** MATLAB6

**Descripción:** A partir de la foto `dpto.jpg` crea las fotos filtradas `jp*.eps` en las que se cambian eliminan los coeficientes de Fourier correspondientes a ceros en la matriz `mask`. Con él se han creado los ejemplos de la sección.

---

```

I = imread('dpto.jpg');
I = im2double(I);
T = dctmtx(8);
B = blkproc(I,[8 8], 'P1*x*P2',T,T');
% Señala los bloques y les da el color del promedio
mask = [1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0

```

```

0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0];
B2 = blkproc(B,[8 8],'P1.*x',mask);
I2 = blkproc(B2,[8 8],'P1*x*P2',T',T);
imshow(I2)
print -deps jp1.eps
% Usa cinco coeficientes de Fourier
mask = [1 1 1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0];
B2 = blkproc(B,[8 8],'P1.*x',mask);
I2 = blkproc(B2,[8 8],'P1*x*P2',T',T);
imshow(I2)
print -deps jp2.eps
% Usa 16 coeficientes de Fourier
mask = [1 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0];

```

```

B2 = blkproc(B,[8 8], 'P1.*x',mask);
I2 = blkproc(B2,[8 8], 'P1*x*P2',T',T);
imshow(I2)
print -deps jp3.eps
% Detecta verticales
mask = [1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0];
B2 = blkproc(B,[8 8], 'P1.*x',mask);
I2 = blkproc(B2,[8 8], 'P1*x*P2',T',T);
imshow(I2)
print -deps jp4.eps

```

---

**Sección:** 2.2

**Tipo:** MATLAB6

**Descripción:** Ésta es una versión simplificada del programa anterior

---

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% CARGA UNA IMAGEN EN COLOR
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xg=imread('lenna.jpg');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% ESCOGE SÓLO EL BLOQUE mxm DE CADA BLOQUE DE
%% COEFICIENTES DE FOURIER
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

m=2;
x=masc(xg,m);
-----
function q=masc(I,n)
I = im2double(I);
T = dctmtx(8);
B = blkproc(I,[8 8], 'P1*x*P2',T,T');
% Señala los bloques y les da el color del promedio
mask=zeros(8);
mask(1:n,1:n)=1;
B2 = blkproc(B,[8 8], 'P1.*x',mask);
I2 = blkproc(B2,[8 8], 'P1*x*P2',T',T);
imshow(I2)
q=100*n*n/64

```

---

**Sección:** 2.2

**Tipo:** MATLAB6

**Descripción:** Resuelve el problema 2.2.6 con diferentes cuantizaciones. Evidentemente estas cuentas se pueden hacer con muchas menos líneas de programa.

---

```

%% PARÁMETROS
I=ones(64, 64);
t=pi/6;
v0=[1 cos(t*1) cos(2*t*1)];
v1=[1 cos(t*3) cos(2*t*3)];
v2=[1 cos(t*5) cos(2*t*5)];
%% MATRIZ DE PRODUCTOS ESCALARES
L=[-512 -221.7025 128
-221.7025 -96 55.4256
128 55.4256 -32];

```



```

delta=[1/3 2/3 2/3]’*[1/3 2/3 2/3];
%% MATRIZ DE LOS lambda k1
L=L.*delta;
%% CUANTIZACIÓN TRIVIAL
Cuant=[1 1 1; 1 1 1; 1 1 1]
round(L./Cuant)
Lc=Cuant.*round(L./Cuant)
%% RECONSTRUCCIÓN
fr=round([v0*Lc*v0’ v0*Lc*v1’ v0*Lc*v2’;...
v1*Lc*v0’ v1*Lc*v1’ v1*Lc*v2’; v2*Lc*v0’ v2*Lc*v1’ v2*Lc*v2’])
Imag=[fr(3,1)*I fr(3,2)*I fr(3,3)*I;...
fr(2,1)*I fr(2,2)*I fr(2,3)*I;...
fr(1,1)*I fr(1,2)*I fr(1,3)*I];
figure(1)
imshow(Imag, [-128 127])
%% CUANTIZACIÓN DEL PROBLEMA
Cuant=[20 40 60; 40 60 80; 60 80 100]
round(L./Cuant)
Lc=Cuant.*round(L./Cuant)
%% RECONSTRUCCIÓN
fr=round([v0*Lc*v0’ v0*Lc*v1’ v0*Lc*v2’;...
v1*Lc*v0’ v1*Lc*v1’ v1*Lc*v2’; v2*Lc*v0’ v2*Lc*v1’ v2*Lc*v2’])
Imag=[fr(3,1)*I fr(3,2)*I fr(3,3)*I;...
fr(2,1)*I fr(2,2)*I fr(2,3)*I;...
fr(1,1)*I fr(1,2)*I fr(1,3)*I];
figure(2)
imshow(Imag, [-128 127])
%%CUANTIZACIÓN COMO LA DEL PRIMER BLOQUE 3X3 DEL JPEG
Cuant=[16 11 10; 12 12 14; 14 13 16]

```

```

round(L./Cuant)
Lc=Cuant.*round(L./Cuant)
%%RECONSTRUCCIÓN
fr=round([v0*Lc*v0' v0*Lc*v1' v0*Lc*v2';...
v1*Lc*v0' v1*Lc*v1' v1*Lc*v2'; v2*Lc*v0' v2*Lc*v1' v2*Lc*v2'])
Imag=[fr(3,1)*I fr(3,2)*I fr(3,3)*I;...
fr(2,1)*I fr(2,2)*I fr(2,3)*I;...
fr(1,1)*I fr(1,2)*I fr(1,3)*I];
figure(3)
imshow(Imag, [-128 127])
%%CUANTIZACIÓN COMO LA DEL BLOQUE 0,3,6x0,3,6 DEL JPEG
Cuant=[16 16 51; 14 29 80; 49 87 120]
round(L./Cuant)
Lc=Cuant.*round(L./Cuant)
%%RECONSTRUCCIÓN
fr=round([v0*Lc*v0' v0*Lc*v1' v0*Lc*v2';...
v1*Lc*v0' v1*Lc*v1' v1*Lc*v2'; v2*Lc*v0' v2*Lc*v1' v2*Lc*v2'])
Imag=[fr(3,1)*I fr(3,2)*I fr(3,3)*I;...
fr(2,1)*I fr(2,2)*I fr(2,3)*I;...
fr(1,1)*I fr(1,2)*I fr(1,3)*I];
figure(4)
imshow(Imag, [-128 127])
%%CUANTIZACIÓN COMO LA MITAD DE LA DEL PROBLEMA
Cuant=[10 20 30; 20 30 40; 30 40 50]
round(L./Cuant)
Lc=Cuant.*round(L./Cuant)
%%RECONSTRUCCIÓN
fr=round([v0*Lc*v0' v0*Lc*v1' v0*Lc*v2';...
v1*Lc*v0' v1*Lc*v1' v1*Lc*v2'; v2*Lc*v0' v2*Lc*v1' v2*Lc*v2'])

```

```

Imag=[fr(3,1)*I fr(3,2)*I fr(3,3)*I;...
fr(2,1)*I fr(2,2)*I fr(2,3)*I;...
fr(1,1)*I fr(1,2)*I fr(1,3)*I];
figure(5)
imshow(Imag, [-128 127])

```

---

**Sección:** 2.2

**Tipo:** MATLAB6

**Descripción:** Filtra los coeficientes de Fourier de la foto `lenna.jpg` eliminando los que están por debajo de ciertos valores umbral. La función de filtrado `tr8x8bn` es una modificación de un programa elaborado por M. Teresa Carrillo con fines académicos.

---

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% CARGA UNA IMAGEN EN BLANCO Y NEGRO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xg=imread('lenna.jpg');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% HACE LA TRANSFORMADA DE COSENO EN BLOQUES 8X8
%% Y ELIMINA LOS COEFICIENTES DE FOURIER MENORES QUE th
%% EL PORCENTAJE DE CEROS ES p0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Umbrales=[0 40 80 120 1000]
% LA IMAGEN ORIGINAL TIENE EL 29.7% DE CEROS
imshow(xg);
th=40;
[p1,nada]=tr8x8bn(xg,gray(256),th);
p1
th=80;
[p2,nada]=tr8x8bn(xg,gray(256),th);
p2
th=120;

```

```

[p3,nada]=tr8x8bn(xg,gray(256),th);
p3
th=1000;
[p4,nada]=tr8x8bn(xg,gray(256),th);
p4
-----
function [perf0,perfl2]=trcos8x8bn(X,map,t)
% Aplica la transformación del coseno (dct2) a la imagen X,
% con paleta map,
% descompuesta en bloques 8x8.
% X debe ser una matriz ( $2^J \times 2^J$ ).
% map una paleta de grises. (vg. X, map obtenidas con load('woman')).
% Pasa un threshold t , (vg. 10).
% Representa:
% la imagen original,
% la imagen reconstruida por bloques 8x8 (idct2) despues
% de haberla pasado el "threshold".
% Calcula:
% perf0: tanto por ciento de ceros en la imagen transformada despues
% de pasar el "threshold".
% perfl2: cociente de las normas en l2 de la imagen transformada
% y de la imagen original.
n=size(X);
n=n(1)-7;
for i=1:8:n
for j=1:8:n
xcl=dct2(X(i:i+7,j:j+7));
xc(i:i+7,j:j+7)=xcl(1:8,1:8);
end

```

```

end
% figure
% imshow(log(abs(xc)),[ ],'notruesize')
xc(abs(xc)<t)=0;
for i=1:8:n
for j=1:8:n
Yl=idct2(xc(i:i+7,j:j+7));
Y(i:i+7,j:j+7)=Yl(1:8,1:8);
end
end
figure
imshow(Y,map)
perf0 = 100*(length(find(xc==0))/(size(xc,1)*size(xc,2)));
xc=double(xc); Xd=double(X);
perf12 = 100*(sum((xc(:).*xc(:)))/sum(Xd(:).*Xd(:)));

```

---

**Sección:** 2.2

**Tipo:** MATLAB6

**Descripción:** Este programa es una modificación del anterior para imágenes en color.

---

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% CARGA UNA IMAGEN EN COLOR
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xg=imread('angus2.jpg');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% HACE LA TRANSFORMADA DE COSENO EN BLOQUES 8X8
%% Y ELIMINA LOS COEFICIENTES DE FOURIER MENORES QUE th
%% EL PORCENTAJE DE CEROS ES p0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Umbrales=[0 40 80 120]

```

```
% LA IMAGEN ORIGINAL TIENE EL 10.3% DE CEROS
```

```
imshow(xg);
```

```
th=40;
```

```
[p1,nada]=tr8x8c(xg,th);
```

```
p1
```

```
th=80;
```

```
[p1,nada]=tr8x8c(xg,th);
```

```
p1
```

```
th=120;
```

```
[p1,nada]=tr8x8c(xg,th);
```

```
p1
```

```
-----
```

```
function [perf0,perfl2]=trcos8x8(X,t)
```

```
% Aplica la transformación del coseno a la imagen X
```

```
% descompuesta en bloques 8x8.
```

```
% X debe ser una matriz ( $2^J \times 2^J \times 3$ ).
```

```
% Pasa un threshold t ), (vg. 10).
```

```
[n1 n2 n3]=size(X);
```

```
n1=n1-7;
```

```
n2=n2-7;
```

```
for m=1:3
```

```
for i=1:8:n1
```

```
for j=1:8:n2
```

```
xcl(:, :, m)=dct2(X(i:i+7, j:j+7, m));
```

```
xc(i:i+7, j:j+7, m)=xcl(1:8, 1:8, m);
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
xc(abs(xc)<t)=0;
```

```

for m=1:3
for i=1:8:n1
for j=1:8:n2
Yl(:,:,m)=idct2(xc(i:i+7,j:j+7,m));
Y(i:i+7,j:j+7,m)=Yl(1:8,1:8,m);
end
end
end
figure
Y=uint8(Y);
imshow(Y)
% Compute compression score.
perf0 = 100*(length(find(xc==0))/(size(xc,1)*size(xc,2)*3));
% Compute  $L^2$  recovery score.
xc=double(xc); Xd=double(X);
perf12 = 100*(sum((xc(:).*xc(:)))/sum(Xd(:).*Xd(:)));

```

---

**Sección:** Exp. 3.1

**Tipo:** MATLAB

**Descripción:** Realiza las iteraciones indicadas de los  $\vec{x}_n$ . Se debe dar el valor inicial de  $x$ . Cada vez que se ejecuta el programa se lleva a cabo una iteración.

---

```

c=[2;1;1;1;2;1;0;0;0;1];
f1=[1 1 1 0 0 0 0 0 0];
x=x+(c(1)-f1*x)*f1'/(f1*f1');
f2=[0 0 0 1 1 1 0 0 0];
x=x+(c(2)-f2*x)*f2'/(f2*f2');
f3=[0 0 0 0 0 0 1 1 1];
x=x+(c(3)-f3*x)*f3'/(f3*f3');
f4=[1 0 0 1 0 0 1 0 0];

```

```

x=x+(c(4)-f4*x)*f4'/(f4*f4');
f5=[0 1 0 0 1 0 0 1 0];
x=x+(c(5)-f5*x)*f5'/(f5*f5');
f6=[0 0 1 0 0 1 0 0 1];
x=x+(c(6)-f6*x)*f6'/(f6*f6');
f7=[1 0 0 0 0 0 0 0 0];
x=x+(c(7)-f7*x)*f7'/(f7*f7');
f8=[0 0 0 0 0 0 1 0 0];
x=x+(c(8)-f8*x)*f8'/(f8*f8');
f9=[0 0 0 0 0 0 0 0 1];
x=x+(c(9)-f9*x)*f9'/(f9*f9');
f10=[0 0 1 0 0 0 0 0 0];
x=x+(c(10)-f10*x)*f10'/(f10*f10')

```

---

**Sección:** Exp. 3.1

**Tipo:** MATLAB6

**Descripción:** Ejemplo de reconstrucción algebraica.

---

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% RECONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA
%% DE UNA MUESTRA 3X3 DEL TIPO:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% OXX
%% XOO
%% OXO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% PARÁMETROS
I=ones(64, 64);
%% VALORES INICIALES
%% ES MEJOR OMITIRLOS Y EJECUTAR

```



```

%% VARIAS VECES EL PROGRAMA,
%% METIÉNDOLOS EN LA PRIMERA ITERACIÓN
%% n=0
%% x=zeros(9,1)
%% LLAMADA AL PROGRAMA ANTERIOR
tomo
n=n+1;
iteracion_numero=n
%% DIBUJO
Imag=[x(1)*I x(2)*I x(3)*I;...
x(4)*I x(5)*I x(6)*I;...
x(7)*I x(8)*I x(9)*I];
imshow(Imag)

```

---

**Sección:** 3.2

**Tipo:** MATLAB6

**Descripción:** Reconstruye una imagen (phan.gif) consistente en un círculo negro con una burbuja (un agujero) a la derecha, usando la transformada de Radon.

---

```

figure(1)
I=ones(100,100);
I(25:75, 25:75)=0;
imshow(I)
theta=0:180;
[R,xp]= radon(I,theta);
figure(2)
I = imread('phan.gif');
I = im2double(I);
imshow(I)
theta=0:180;

```

```

[R, xp]= radon(I, theta);
figure(3)
plot(xp, R(:, 90));
figure(4)
I=zeros(100, 100);
I(25:75, 25:75)=1;
imshow(I)
theta=0:180;
[R, xp]= radon(I, theta);

```

**Sección:** 3.2

**Tipo:** MATLAB6

**Descripción:** Reconstruye una imagen patrón utilizando la transformada de Radon discretizada con un número de ángulos  $n$ .

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% TRANSFORMADA DE RADON Y SU RECONSTRUCCIÓN
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% IMAGEN PATRÓN
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X=phantom(256);
figure
imshow(X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% NÚMERO DE ÁNGULOS
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n=40;
h=180/n;
theta=[0:h:180];

```

```
[R,a]=radon(X,theta);  
figure  
imshow(iradon(R,h));
```

---

**Sección:** Exp. 3.2

**Tipo:** MATLAB

**Descripción:** Dibuja las “sombras” correspondientes a los tres tubos elegidos.

---

```
x=[-1:.01:1];  
subplot(1,3,1)  
y1=2*sqrt(1-x.*x);  
plot(x,y1)  
axis([-1 1 0 3])  
subplot(1,3,2)  
y2=2*sqrt(1-x.*x)-sqrt(1-min(1,4*x.*x));  
plot(x,y2)  
axis([-1 1 0 3])  
subplot(1,3,3)  
y3=2*sqrt(1-x.*x)+sqrt(1-min(1,4*x.*x));  
plot(x,y3)  
print -deps fsomb.eps
```

---

**Sección:** Exp. 3.2

**Tipo:** FORTRAN

**Descripción:** Crea las listas de datos correspondientes a la reconstrucción a partir de las sombras de los tubos considerados. La función  $S$  puede elegirse como  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$ . Los dibujos tridimensionales se hacen en MATLAB, una vez cargados los datos en la matriz  $A1$ , con  $[r,theta]=meshgrid(A1(:,1),0:0.3:6.3)$ ;  $[z,theta]=meshgrid(A1(:,2),0:0.3:6.3)$ ;  $mesh(r.*cos(theta),r.*sin(theta),z)$ .

---

c Algoritmo de reconstrucción para objetos 2D en el disco  
c unidad con simetría radial a partir de la "sombra"  $S=S(x)$ .

```

c
c
c Entrada de la precisión
print*, 'Precisión:=0.01'
h=0.01
c print*, 'x'
c read*, x
c
c BUCLE PRINCIPAL
do 100 x=0,1.3,h
c
c Regla del trapecio en [0,pi] con paso h
result=0.
do 20 theta=0,3.141592654,h
call fintegr(F,x,theta,h)
result=result+F
20 continue
result=h*result
c
c Imprime resultados
print*,x,result
100 continue
stop
end
c
c Función a integrar . Depende de x y theta
c y su valor quedará almacenado en F.
subroutine fintegr(F,x,theta,h)
N=int(1./h)

```

```

var=x*cos(theta)
F=1.23370055*S(var)
do 10 k=N,0,-1
t=float(2*k+1)
F=F-S(var+t*h)/t/t
10 continue
F=0.202642367*F/h
return
end
c
c
c Define la función sombra
c
c TUBO MACIZO R=1
function S1(u)
if (abs(u).ge.1.) then
S1=0
else
S1=2*sqrt(1.-u*u)
endif
return
end
c TUBO HUECO (CORONA .5<R<1)
function S2(u)
S2=S1(u)-.5*S1(2.*u)
return
end
c TUBO CON ALMA R<.5 DE DOBLE DENSIDAD
function S3(u)

```

```
S3=S1(u)+.5*S1(2.*u)
```

```
return
```

```
end
```

```
c FUNCION
```

```
function S(u)
```

```
S=S3(u)
```

```
return
```

```
end
```

---

**Sección:** 4.1

**Tipo:** FORTRAN

**Descripción:** Genera datos aleatorios que se pueden aproximar con el teorema central del límite.

---

```
c Teorema central del límite tirando 10 dados n veces
```

```
c
```

```
c
```

```
dimension a(60)
```

```
c Inicia a
```

```
do 5 i=1,60
```

```
5 a(i)=0
```

```
c
```

```
c Semilla aleatoria
```

```
open(2,FILE='datos.txt')
```

```
j=Mod(TIMES(),1000)
```

```
do 7 i=1,j
```

```
7 x=Rand()
```

```
c
```

```
c Número de veces que se tiran los 10 dados
```

```
n=1000
```

```

epsi=1./float(n)
c
do 10 i=1,n
m=0
do 20 k=1,10
20 m=m+int(6*Rand()+1)
a(m)=a(m)+epsi
10 continue
print*,a
c
cc Escribe el resultado
c do 30 i=1,60
cc30 write(2,*) i,'-->',a(i)*100./float(n)
c close(2)
stop
end

```

---

**Sección:** 4.2

**Tipo:** FORTRAN

**Descripción:** Aproxima la integral correspondiente a los paseos aleatorios en dimensión 3.

---

```

c Integral de los paseos aleatorios D=3
c
c
h=0.005
pi=3.141592654
x=0.
do 10 u1=h, pi, h
do 10 u2=h, pi, h

```

```

do 10 u3=h, pi, h
x=x+h*h*h/(sin(u1/2.)*sin(u1/2.)+sin(u2/2.)*sin(u2/2.)
* +sin(u3/2.)*sin(u3/2.))
10 continue
print*,x
stop
end

```

---

**Sección:** 4.3

**Tipo:** MATLAB

**Descripción:** Simulación discretizada de un proceso de difusión que ocurre entre dos paredes y que tiene una distribución inicial con dos máximos.

---

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% PROCESO DE DIFUSIÓN (MOV. BROWNIANO) DISCRETIZADO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 96 LUGARES PARA LAS PARTÍCULAS
x=[1:96];
% DISTRIBUCIÓN INICIAL
p=(96-x).*(1+sin(6*pi*x/96));
p(1:24)=0;
p(88:96)=0;
figure
plot(x,p)
% MATRIZ PARA LAS ITERACIONES
m=96;
A=.5*diag(ones(m-1,1),1)+.5*diag(ones(m-1,1),-1);
% LAS PARTÍCULAS REBOTAN EN LOS EXTREMOS
A(1,1)=.5;
A(96,96)=.5;

```



```

%%% ITERA
figure
for m=1:40
% ITERACIONES MOV. BROWNIANO
% PINTA UNA ITERACIÓN DE CADA 5
plot(x,p);
p=p*A;
p=p*A;
p=p*A;
p=p*A;
p=p*A;
hold on
end
hold off

```

---

**Sección:** Exp. 4.1

**Tipo:** FORTRAN

**Descripción:** Calcula el número de formas de obtener cada puntuación tirando 10 dados.

---

```

c Todas las posibilidades tirando 10 dados n veces
c
c
dimension J(60)
c Inicia a
do 5 i=1,60
5 J(i)=0
c
open(2,FILE='edado.txt')
c

```

```

do 10 i1=1,6
do 10 i2=1,6
do 10 i3=1,6
do 10 i4=1,6
do 10 i5=1,6
do 10 i6=1,6
do 10 i7=1,6
do 10 i8=1,6
do 10 i9=1,6
do 10 ia=1,6
m=i1+i2+i3+i4+i5+i6+i7+i8+i9+ia
J(m)=J(m)+1.0
10 continue
c
c Escribe el resultado
do 30 i=1,60
30 write(2,*) 'Sale un ',i,'-->',J(i),' veces'
close(2)
print*, J
stop
end

```

---

**Sección:** Exp. 4.1

**Tipo:** MATLAB

**Descripción:** Dibuja los datos correspondientes al experimento de lanzar los dados 100 veces.

---

```

n=[10:1:60];
%figure(1)
plot(n,0.073869756*exp(-3*(n-35).*(n-35)/175),'-');

```

```

axis([10 60 0 0.1])
print -deps ga100.eps
D=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
1 1 0 3 2 5 5 5 7 7 10 3 5 6 8 6 4 7 5 2 2 2 0 1 3 ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]/100;
%hold on
plot(n,D,'-');
print -deps da100.eps
% error máximo
maxerror=max(abs(0.073869756*exp(-3*(n-35).*(n-35)/175)-D))
% error promedio
errorprom=sum(abs(0.073869756*exp(-3*(n-35).*(n-35)/175)-D))/51
hold off

```

---

**Sección:** Exp. 4.1

**Tipo:** MATLAB

**Descripción:** Muestra el histograma al tirar n dados 100 veces y se compara con lo que predice el teorema central del límite.

---

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% ¿SE CUMPLE EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE?
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SE HALLA EL HISTOGRAMA AL TIRAR n
% DADOS Y SUMAR LAS PUNTUACIONES
n=10000;
y=sum(rand(100,n));
x=[40:60];
hist(y,x);
hold on
% SE COMPARA CON LA GAUSSIANA

```

```

x2=[40:.1:60];
y2=exp(-(x2-50).^2*3/50)/sqrt(2*pi*25/3);
plot(x2,n*y2,'r')
hold off

```

---

**Sección:** Exp. 4.2

**Tipo:** FORTRAN

**Descripción:** Calcula las proporciones en un número a elegir de iteraciones en la urna de Pólya.

---

```

c Urna de Pólya
c
dimension n(10000)
j=Mod(TIMES(),1000)
do 7 i=1,j
7 x=Rand()
c Una bola de cada color
n(1)=1
n(2)=0
c Número de bolas blancas
nb=1
c Número total de extracciones
print*, 'Número de extracciones'
read*,nt
do 10 j=2, nt
c Proporción
print*, j, float(nb)/float(j)
i=int(j*Rand()+1)
n(j+1)=n(i)
nb=nb+n(i)

```

```
10 continue
```

```
stop
```

```
end
```

---

**Sección:** 5.2

**Tipo:** MATLAB

**Descripción:** Dibuja las trayectorias para el campo de velocidades correspondiente a  $1 - z^{-2}$  que representa el flujo en torno a un obstáculo circular en ausencia de circulación.

---

```
figure(1)
```

```
%
```

```
% La ecuación está en polares. El ángulo varía entre 0 y pi.
```

```
ang=[0.01:0.01:3.14];
```

```
%
```

```
% El parámetro selecciona diferentes trayectorias
```

```
param=[.05:.15:2]';
```

```
la=param*(1./sin(ang));
```

```
r=.5*(la+sqrt(la.*la+4));
```

```
x=r*diag(cos(ang));
```

```
y=r*diag(sin(ang));
```

```
plot(x',y',x',-y',0,0)
```

```
axis([-5 5 -4 4])
```

```
axis off
```



---

**Se acabó.** A modo de indicación para posibles docentes futuros de este curso, señalaré que ha dado tiempo a cubrir en el cuatrimestre todos los apuntes excepto cuatro secciones, sobrando algunos días, y que esencialmente el esquema de evaluación establecido ha consistido en dos parciales y un examen oral sobre un trabajo individual o en grupo de tema de elección libre (más detalles en <http://www.uam.es/fernando.chamizo>). Mi consejo es no llevar nunca a cabo este sistema de evaluación cuando se tienen casi setenta estudiantes matriculados. Valgan también estas últimas líneas para agradecer la atención prestada por los alumnos que han seguido o sufrido el curso. No sé hasta qué punto han quedado satisfechos, y seguramente nunca lo sabré, porque el día de las encuestas asistieron pocos. El balance docente personal que me queda es que he dedicado muchísimo esfuerzo (apuntes, ejercicios, programas, exposiciones, *web*) para obtener pocos frutos; sinceramente creo que otros cursos me han quedado mucho mejor con menos dedicación. Evidentemente el resultado podría ser bien distinto si yo hubiera sido un experto en Modelización II.

