Resumen del segundo parcial

Las siguientes líneas resumen los capítulos 4, 5 y 6 pero, por suspuesto, no son un listado exhaustivo de los contenidos ni muestran todos los ejemplos posibles.

Cap. 4. Estimación puntual

Idea: A veces tenemos una función de probabilidad o de densidad que depende de un parámetro desconocido (o de varios) que deseamos estimar a través de un experimento aleatorio repetido varias veces (una muestra). La función que da la aproximación a partir del resultado de los experimentos se llama estimador.

Ejemplo con palabras: Tenemos una moneda que no sabemos si es justa y queremos estimar la probabilidad de que salga cara. Para ello tiramos la moneda N veces y un estimador viene dado por el número de caras obtenidas dividido por N.

Métodos: Para construir estimadores de un parámetro hemos estudiado dos métodos.

1. *Método de máxima verosimilitud*. Se halla primero la función de probabilidad o de densidad de la muestra, L, multiplicando N veces (el tamaño de la muestra) la que tenemos en el enunciado evaluada en diferentes variables. Después, se calcula el valor del párametro para el que L alcanza un máximo, habitualmente esto requiere derivar e igualar a cero. *Truco*: habitualmente es más fácil maximizar $\log L$.

2. *Método de los momentos*. Se calcula la esperanza de la variable aleatoria (dependerá del parámetro), se iguala a la media muestral $(\sum X_i)/N$ y se despeja el parámetro.

Nota: Si hubiera más de un parámetro a estimar, en 1 habría que usar derivadas parciales y en 2 momentos de orden superior.

Ejemplo. Sea $(X_1, \dots, X_N)$ una muestra aleatoria de una población X con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \theta x^{-\theta-1} \quad \text{si } x > 1\,, \quad (\theta > 0) \quad \text{y cero en el resto.}$$

a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.
b) Hallar el estimador de θ por el método de los momentos.

Solución. a) $L(\theta) = \prod_{i=1}^N (\theta x_i^{-1-\theta}) = \theta^N P^{-1-\theta}$ con $P = \prod_{i=1}^N x_i \Rightarrow \log L(\theta) = N\log\theta - (\theta+1)P$. Derivando e igualando a cero, $N/\theta - \log P = 0 \Rightarrow$ Se alcanza un máximo en $N/\log P$ (la derivada segunda es negativa), por tanto el estimador es $\widehat{\theta} = N/\log P = N/\sum \log x_i$.

b) $E_\theta[X] = \int_1^\infty x\theta x^{-\theta-1}\,dx = \theta/(\theta-1)$. Igualando a $\bar{x} = (\sum x_i)/N$ y despejando θ en $\theta/(\theta-1) = \bar{x}$ se obtiene $\widehat{\theta} = \bar{x}/(\bar{x}-1)$.

Cap. 5. Intervalos de confianza

Idea: Un intervalo de confianza para el valor de un parámetro es un intervalo tal que tras una serie de experimentos (muestra) tenemos cierta seguridad de que el parámetro está realmente allí. Esta seguridad es una probabilidad que se llama nivel de confianza (y se denota $1-\alpha$). La semilongitud del intervalo de confianza es el máximo error cometido admitiendo que el parámetro esté en el intervalo, evidentemente dependerá del número N de experimentos que hagamos (tamaño muestral).

Ejemplo con palabras: Si en el ejemplo de la moneda del capítulo anterior N es muy grande, es más difícil que nos equivoquemos mucho en la estimación allí indicada (el intervalo de confianza será pequeño alrededor de nº de caras$/N$). Si sólo tiramos la moneda un par de veces el resultado es poco concluyente (el intervalo de confianza es demasiado grande).

Métodos: Sólo hay métodos exactos para poblaciones normales en las que los parámetros son la media o la varianza. El esquema general es dar una cantidad Z (llamada pivotal) que siga una distribución conocida. Buscando z_1 y z_2 con $P(Z < z_1) = \alpha/2$ y $P(Z < z_2) = 1 - \alpha/2$, se consigue $P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$ y por tanto $z_1 < Z < z_2$ (después de operar) es el resultado buscado.

- *Caso I, Caso II.* En una población normal $N(\mu, \sigma)$ queremos dar un intervalo de confianza para μ. Si σ es conocida, $(\mu - \bar{x})/(\sigma/\sqrt{N})$ es una cantidad pivotal que sigue una $N(0, 1)$. Si σ es deconocida, la cantidad pivotal es $(\mu - \bar{x})/(s/\sqrt{N})$, con $s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2/(N-1)$, que sigue una t_{N-1}. En ambos casos $z_1 = -z_2$ y por tanto el intervalo de confianza es de la forma $|\mu - \bar{x}| < \texttt{error}$. El valor de z_2 se busca en tablas usando $P(Z < z_2) = 1 - \alpha/2$.

- *Caso III.* En una población normal queremos dar un intervalo de confianza para σ. La cantidad pivotal es $(N-1)s^2/\sigma^2$ que sigue una χ^2_{N-1}. Esta vez no hay ninguna relación sencilla entre z_1 y z_2.

- *Aproximaciones*. En una población $B(1, p)$ es decir, si queremos dar un intervalo de confianza para cierta probabilidad (proporción) de éxitos, siempre que el tamaño muestral no sea pequeño, es una buena aproximación proceder formalmente como si fueran una población normal con $\mu = p$ y σ conocida igual a $\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}$ donde $\widehat{p}$ es la estimación para p a partir de la muestra.

Ejemplo. Se desea conocer la probabilidad de que una pieza falle en los cinco primeros años de funcionamiento. En 100 piezas tomadas al azar se observaron 10 fallos. Hallar el intervalo de confianza de nivel 0,95 para la probabilidad pedida. ¿Cuántas piezas se deberían observar para que, con el mismo nivel de confianza, el margen de error en la estimación de la proporción de fallos sea de $\pm 0{,}01$?

Solución. Escribamos $p =$probabilidad de fallo. La aproximación que se tiene de p es $\widehat{p} = 10/100 = 0{,}1$ por tanto se procede como en el Caso I con $\sigma = \sqrt{0{,}1(1-0{,}1)} = 0{,}3$. Según el enunciado, $\alpha = 0{,}05$. Buscando en la tabla, para $Z \sim N(0, 1)$, $P(Z < z_2) = 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \Rightarrow z_2 = 1{,}96$. El intervalo de confianza es entonces

$$\frac{|p - 0{,}1|}{0{,}3/\sqrt{100}} < 1{,}96 \qquad \Rightarrow \qquad |p - 0{,}1| < 0{,}0588.$$

Con N observaciones el intervalo sería $|p-0{,}1| < 1{,}96{\cdot}0{,}3/\sqrt{N}$. Para tener $1{,}96{\cdot}0{,}3/\sqrt{N} < 0{,}01$ se necesita $N > 3457{,}44$.

Cap. 6. Contraste de hipótesis

Idea: Se quiere decidir acerca de una hipótesis H_0 sobre un parámetro desconocido. Para ello se hacen experimentos (se extrae una muestra) y si el resultado está en cierta región se rechaza, en otro caso se acepta. El nivel de significación (denominado α) es la máxima probabilidad de rechazar H_0 cuando es cierta. Se escoge pequeño y por ello el contraste de hipótesis es muy conservador: no se rechaza la hipótesis a no ser que se tenga una sólida evidencia experimental para ello.

Ejemplo con palabras: En la moneda considerada en los ejemplos anteriores hacemos la hipótesis de que la probabilidad de cara es del 50 %. Si al lanzarla muchas veces hay muchas más cruces que caras deberíamos rechazar esta hipótesis con cierto nivel de significación.

Métodos: Esencialmente hemos estudiado dos tipos de métodos, unos tienen que ver con intervalos de confianza (derivan de lo que se llama el método de razón de verosimilitudes) y los otros se recogen bajo el nombre genérico de contrastes χ^2. Entre los primeros distinguimos:

- En una población normal H_0 es que μ o σ tengan cierto valor, es decir, $\mu = \mu_0$ o $\sigma = \sigma_0$. Se rechaza la hipótesis con nivel de significación α si μ_0 o σ_0 no pertenecen al intervalo de confianza con nivel de confianza $1 - \alpha$.

- En una población normal H_0 es de la forma $\mu \le \mu_0$, $\mu_0 \le \mu$, $\sigma \le \sigma_0$ o $\sigma_0 \le \sigma$ (o lo mismo con '$<$' en lugar de '$\le$'). Se rechaza la hipótesis con nivel de significación α si no pertenece al análogo del intervalo de confianza sin el extremo compatible con la desigualdad de H_0 pero todavía con probabilidad $1 - \alpha$. Por ejemplo, en los primeros casos se acepta si $(\bar{x} - \mu_0)/\ldots < z_2$ o $(\mu_0 - \bar{x})/\ldots < z_2$, respectivamente, con $P(Z < z_2) = 1 - \alpha$.

- *Aproximaciones*. En el caso de poblaciones $B(1, p)$ puede utilizarse la aproximación descrita en el capítulo anterior.

En los contrastes χ^2 siempre tendremos una tabla de frecuencias observadas y los métodos estudiados responden a dos situaciones:

- H_0 es que la tabla corresponde a cierta distribución. Se calculan las frecuencias esperadas e_i y con las observadas O_i y $n = \sum O_i$ se halla $\lambda = \sum (O_i - e_i)^2/e_i = \sum O_i^2/e_i - n$. Se rechaza la hipótesis si $\lambda > \chi^2_{n-1;\alpha}$, donde $\chi^2_{n-1;\alpha}$ es el valor que da la tabla de χ^2 para $n - 1$ grados de libertad y nivel de significación α.

- Tenemos varias tablas que escribimos como una tabla de f filas y c columnas y la hipótesis H_0 es que todas ellas responden a la misma distribución. Las frecuencias esperadas se calculan ahora como $e_{ij} = (\sum_k O_{ik})(\sum_l O_{lj})/n$ con $n = \sum_i \sum_j O_{ij}$. Como antes, se rechaza la hipótesis si $\lambda > \chi^2_{(c-1)(f-1);\alpha}$ con $\lambda = \sum_i \sum_j O_{ij}^2/e_{ij} - n$.

Ejemplo. Una empresa fabrica cuerdas cuya resistencia media a la rotura es de 300 kg., con desviación típica 24 kg. Una muestra de 64 cuerdas fabricadas mediante un nuevo proceso dio una resistencia media de 310 kg. La compañía desea estudiar si con nivel de significación 0,05 el nuevo proceso da mejores resultados que el antiguo.

Solución. Tomamos $H_0: \ \mu \leq 300$ (correspondiente a que no ha mejorado, esto es lo contrario de lo que queremos probar porque el contraste de hipótesis es conservador y sólo queremos cambiar el proceso si estamos seguros de ello). Para aceptar H_0 se tendría que verificar $(\bar{x} - 300)/(24/\sqrt{64}) < z_2$. Sustituyendo $\bar{x} = 310$ y $z_2 = 1{,}645$ que viene de $P(Z < z_2) = 1 - 0{,}05$, la desigualdad no se cumple $\Rightarrow$ se rechaza $H_0 \Rightarrow$ se acepta que el proceso ha mejorado.

Ejemplo. Después de lanzar un dado 500 veces, se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	76	83	90	78	99	74

Al nivel se significación 0,05, ¿se puede afirmar que el dado es regular?

Solución. Las frecuencias esperadas son $e_i = 500/6$. Calculando $\lambda = \sum O_i^2/e_i - n$ se obtiene $\lambda = 5{,}5112$ mientras que mirando en la tabla $\chi^2_{5;0{,}05} = 11{,}07$. Entonces se acepta la hipótesis de que el dado es regular.