1) En una urna hay 6 bolas que pueden ser blancas o negras. Sabemos que hay al menos una de cada color, por tanto la probabilidad de que una bola sea negra puede ser $\theta = 1/6,\ 2/6,\ 3/6,\ 4/6$ ó $5/6$. Supongamos que extraemos tres de ellas con reemplazamiento y damos por buena la proporción obtenida $\widehat{\theta}$ de bolas negras.

a) Calcular para cada posible valor de θ cuál es la probabilidad de que $|\widehat{\theta} - \theta| < 0{,}3$.

b) Si tomamos una muestra de 6 bolas (con reemplazamiento) ¿Podríamos estar seguros al menos al 75 % de que se cumple la desigualdad anterior cualquiera que sea θ?

2) Resolver el primer apartado del ejercicio anterior si la muestra extraída con reemplazamiento es de 10 bolas y se aproxima la binomial por una normal para simplificar los cálculos.

3) [6] La vida activa (en días) de cierto fármaco sigue una distribución $N(1200\,;\,40)$. Se desea enviar un lote de este fármaco de manera que la vida media del lote no sea inferior a 1180 días, con probabilidad 0,95. Hallar el tamaño del lote.

4) [5] En una población, la altura de los individuos varones sigue una distribución $N(\mu; 7{,}5)$. Halla el tamaño de la muestra para estimar μ con un margen de error inferior a ± 2 cm para un nivel de confianza 0,90.

5) [3] Se mide el tiempo de duración (en segundos) de un proceso químico realizado 20 veces en condiciones similares, obteniéndose los siguientes resultados:

$$93, 90, 97, 90, 93, 91, 96, 94, 91, 91, 88, 93, 95, 91, 89, 92, 87, 88, 90, 86\,.$$

Suponiendo que la duración sigue una distribución normal, hallar los intervalos de confianza al 90 % para la media y la desviación típica.

6) Para estimar la varianza de una población normal se extrae una muestra de 25 elementos y se calcula la cuasivarianza. Demostrar que con este tamaño muestral y un nivel de confianza admitido del 90 % el error al aproximar la varianza puede ser casi del 50 % del valor estimado. ¿Qué habría que hacer para reducir este error?

7) [11] En un estudio sobre el tiempo de desarrollo de una especie de insectos en dos poblaciones aisladas, A_1 y A_2, se obtuvieron respectivamente los datos: $N_1 = 13$, $\bar{x}_1 = 4$, $s_1 = 3$ y $N_2 = 11$, $\bar{x}_2 = 5$, $s_2 = 2{,}2$.

a) Suponiendo que los tiempos de desarrollo en estas población siguen distribuciones normales, hallar un intervalo de confianza para el cociente de varianzas al nivel 0,80.

b) Si cierto modelo asegurase que las desviaciones típicas de ambas poblaciones son $\sigma_1 = \sigma_2 = 2{,}6$, hallar un intervalo de confianza para la diferencia de las medias con nivel de confianza 0,90.

Los números entre corchetes indican problemas del libro de J. de la Horra.

8) De una población normal de media μ desconocida se selecciona una muestra de tamaño $n = 10$, resultando: 40, 45, 39, 46, 58, 52, 50, 45, 57, 49. Constrúyase un intervalo de confianza al 95 % para el parámetro μ, suponiendo que:
a) La varianza poblacional es $\sigma^2 = 49$;
b) La varianza poblacional es desconocida.

9) Sabiendo que X sigue una distribución $N(\mu\,; 4)$, calcúlese el tamaño muestral mínimo para que, con una confianza del 99 %, el intervalo $(\bar{x} - 1{,}5, \bar{x} + 1{,}5)$ contenga al parámetro μ.

10) [1] En una población se desea conocer la probabilidad de que un individuo sea alérgico al polen de las acacias. En 100 individuos tomados al azar se observaron 10 alérgicos. Hallar el intervalo de confianza al 95 % para la probabilidad pedida. ¿Cuántos individuos se deberían observar para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo en la estimación de la proporción de alérgicos sea del 0,01?

11) Se admite que el número de microorganismos en una muestra de 1 mm cúbico de agua de un río sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. En 40 muestras se han detectado, en total, 833 microorganismos. Calcular un intervalo de confianza al 90 % para λ.

12) [8] Una noticia en el periódico dice que, de 1000 personas encuestadas sobre una cuestión, 556 se muestran a favor y 444 en contra, y concluye afirmando que el 55,6 % de la población se muestra a favor, con un margen de error de ± 3 %. ¿Cuál es el nivel de confianza de esta afirmación?

13) Supongamos que en el problema anterior quisiéramos un nivel de confianza del 90 %, ¿cuál sería el margen de error?

14) [9] Se quiere estudiar la proporción p de declaraciones de la renta con algún defecto. En una muestra preliminar pequeña (*muestra piloto*) de tamaño 50 se han observado 22 declaraciones defectuosas. ¿Cuál es el tamaño muestral necesario para estimar p cometiendo un error máximo de 0,01 con una probabilidad 0,99?

15) Una fábrica elabora dos artículos A y B, cuya demanda aleatoria sigue una distribución normal de medias μ_A y μ_B desconocidas, y desviaciones típicas $\sigma_A = 100$ y $\sigma_B = 50$. Observados 100 puntos de venta, la demanda media de dichos artículos ha resultado de 200 y 150 unidades, respectivamente. Constrúyase un intervalo de confianza al 95 % para la diferencia de medias. *Indicación*: La resta de las demandas debe seguir una normal $N(\mu_A - \mu_B; \sqrt{100^2 + 50^2})$.

16) En una muestra aleatoria de 500 familias propietarias de televisor en una gran ciudad, se comprobó que 280 se habían suscrito a cierto canal de televisión. Obténgase un intervalo de confianza del 95 % de la proporción real de familias con televisor suscritas a dicho canal en esa ciudad.

17) Una máquina produce engranajes cuyo diámetro, debido a imperfecciones inherentes al funcionamiento de la máquina, es una variable aleatoria con distribución $N(\mu\,; 0{,}03)$. Calcúlese: el tamaño n de la muestra de engranajes necesario para poder construir, a partir de la media muestral $\bar{x}$, un intervalo de confianza de μ al 95 % de amplitud menor que 0,02 mm.

18) Para construir un intervalo de confianza de la media poblacional de una $N(\mu\,;\,\sigma)$ con σ conocida, se ha utilizado una muestra de tamaño n y se ha obtenido el intervalo del 95 %. ¿Cómo ha de ser modificado el tamaño de la muestra para obtener el mismo intervalo con una confianza del 99 %?

19) Se desea conocer la probabilidad de que una pieza falle en los cinco primeros años de funcionamiento. En 100 piezas tomadas al azar se observaron 10 fallos. Hallar el intervalo de confianza de nivel 0,95 para la probabilidad pedida. ¿Cuántas piezas se deberían observar para que, con el mismo nivel de confianza, el margen de error en la estimación de la proporción de fallos sea de $\pm 0{,}01$?

20) En una explotación minera, las rocas excavadas se someten a un análisis químico para determinar su contenido porcentual de cadmio. Se puede suponer que este contenido es una variable con distribución normal de media μ y varianza σ^2. Después de analizar 25 rocas se obtiene un contenido porcentual medio de 9,77 con una cuasidesviación típica de 3,164.

a) Construir un intervalo de confianza de nivel 95 % para el contenido porcentual medio de cadmio en la mina.

b) Construir un intervalo de confianza de nivel 95 % para σ.