1) En una urna hay siete bolas que pueden ser blancas o negras. Al extraer tres con reemplazamiento hemos obtenido la primera negra y las otras dos blancas. ¿Cuál es la proporción más probable?

2) [4] Sea $(X_1, \ldots, X_N)$ una muestra aleatoria de una población X con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\theta^2}\right) \quad \text{si } x > 0\,, \quad (\theta > 0) \quad \text{y cero en el resto.}$$

Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

3) En una clase muy numerosa queremos estimar la proporción θ de alumnas. Extraemos una muestra de dos estudiantes que resultan ser ambos varones. ¿Qué estimación de máxima verosimilitud corresponde para θ? Todos tenderíamos a descartar este resultado y confiar más en un valor próximo a 0,5. Tratar de dar una explicación de esta paradoja.

4) [3] Sea $(X_1, \ldots, X_N)$ una muestra aleatoria de una población X con función de densidad:

$$f_\theta(x) = e^{-x+\theta} \quad \text{si } x > \theta\,, \quad (\theta \in \mathbb{R}) \quad \text{y cero en el resto.}$$

a) Hallar el estimador por el método de los momentos de θ.
b) Estudiar si el estimador encontrado en el apartado anterior es insesgado.

5) [5] Sea $(X_1, \ldots, X_N)$ una muestra aleatoria de una población X con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \theta x^{-\theta-1} \quad \text{si } x > 1\,, \quad (\theta > 0) \quad \text{y cero en el resto.}$$

a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.
b) Hallar el estimador de θ por el método de los momentos.

6) [6] Se toma una muestra aleatoria de tamaño N de una población cuya función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{si } x > 0 \quad \text{y cero en el resto,}$$

donde μ puede ser cualquier número real y σ es mayor que cero. Hallar los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ^2.

7) Sabemos que cierta variable aleatoria sigue una distribución de Poisson. Extraemos una muestra que resulta ser $(0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 3)$. ¿Cómo estimar $P(X > 2)$?

8) [9] La distancia X entre un árbol cualquiera y el árbol más próximo a él en un bosque sigue una distribución de Rayleigh con función de densidad

$$f_\theta(x) = 2\theta x \exp(-\theta x^2) \quad \text{si } x > 0 \quad (\theta > 0) \quad \text{y cero en el resto.}$$

Los números entre corchetes indican problemas del libro de J. de la Horra.

a) Obtener el estimadores de máxima verosimilitud de θ. ¿Es el estadístico suficiente?
b) Obtener el estimador de θ por el método de los momentos.

9) [10] El coseno X del ángulo con el que se emiten los electrones en un proceso radiactivo es una variable aleatoria con densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1+\theta x}{2} \quad \text{si } |x| \leq 1 \quad (|\theta| \leq 1) \quad \text{y cero en el resto.}$$

Consideramos una muestra aleatoria $(X_1, \ldots, X_N)$ de esta variable aleatoria.
a) Obtener el estimador de θ por el método de los momentos.
b) Calcular la varianza de este estimador y demostrar que es consistente.

10) [11] Se considera una muestra aleatoria $(X_1, \ldots, X_N)$ de una población con densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad \text{si } x > 0 \quad (\theta > 0) \quad \text{y cero en el resto.}$$

a) Obtener los estimadores de máxima verosimilitud de θ y θ^2.
b) Consideramos ahora el estimador $T = (X_1 + 2X_2)/3$. ¿Es T insesgado para estimar θ? Hallar la varianza de T.

11) La altura en metros de varones en cierto rango de edad sigue una distribución normal $N(1{,}7, \sigma)$. Para estimar σ empleamos la segunda ecuación del método de momentos: $E_\sigma[X^2] = N^{-1} \sum_{i=1}^N X_i^2$.
a) Hallar el estimador correspondiente.
b) Probar que para una muestra en la que todos los individuos tienen una altura menor que la media, se llega a un resultado absurdo.
c) Comprobar que para dicha muestra no se cumple la primera ecuación del método de los momentos.

12) [12] La lectura de voltaje dada por un voltímetro conectado a un circuito eléctrico, es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(\theta, \theta + 1)$, siendo θ el verdadero valor (desconocido) del voltaje. Sea $(X_1, \ldots, X_N)$ una muestra aleatoria de lecturas de dicho voltímetro.
a) Demostrar que la media muestral $\bar{X}$ es un estimador sesgado de θ, y calcular el sesgo.
b) Calcular el error cuadrático medio de $\bar{X}$.
c) Obtener, a partir de $\bar{X}$, un estimador insesgado de θ.

13) Sea X una variable aleatoria continua que sólo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3 con las siguientes probabilidades:

$$P(X = 0) = (1 - \theta_1)(1 - \theta_2), \qquad P(X = 1) = (1 - \theta_1)\theta_2,$$
$$P(X = 2) = \theta_1(1 - \theta_2), \qquad P(X = 3) = \theta_1\theta_2,$$

para ciertos $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$.

a) Comprobar que la función de probabilidad de una muestra $(X_1, \ldots, X_N)$ es:

$$P_{\theta_1\theta_2}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \theta_1^{n_{23}}(1-\theta_1)^{N-n_{23}}\theta_2^{n_{13}}(1-\theta_2)^{N-n_{13}}$$

donde $n_{23} = \#\{x_i \ : \ x_i = 2 \text{ ó } x_i = 3\}$ y $n_{13} = \#\{x_i \ : \ x_i = 1 \text{ ó } x_i = 3\}$.

b) Hallar el estimador de máxima verosimilitud para θ_1 y θ_2 en términos de n_{23} y n_{13}.

c) Probar que $X = Y + 2Z$ donde Y sigue una $B(1, \theta_1)$ y Z una $B(1, \theta_2)$. Tratar de explicar el resultado de b) a partir de ello.

14) [16] Disponemos de una variable aleatoria de una población con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2} \quad \text{si } x \geq \theta \quad (\theta > 0) \qquad \text{y cero en el resto.}$$

Calcular los estimadores de máxima verosimilitud de θ y de $1/\theta$.

15) [17] Se obtiene una muestra aleatoria $(X_1, \ldots, X_N)$ de una población con función de densidad

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \quad \text{si } x \in (0,1) \quad (\theta > 0) \qquad \text{y cero en el resto.}$$

Para estimar θ, calcúlese:

a) un estadístico suficiente;

b) el estimador de máxima verosimilitud;

c) el estimador por el método de los momentos.

16) [18] Supongamos que se realizan N observaciones independientes de una variable aleatoria X, con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\, x^{\frac{1}{\theta}-1} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad (\theta \neq 0) \qquad \text{y cero en el resto.}$$

a) Hallar estimadores de θ por el método de los momentos y por el de máxima verosimilitud.

b) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de $P_\theta(X < 1/2)$.