1) Decidir si las siguientes funciones son funciones de distribución para algún valor de α:

$$a)\ \frac{x^2}{x^2+\alpha^2}, \qquad b)\ 1+\alpha e^{\alpha e^x}, \qquad c)\ \frac{e^{\alpha x}}{e^x+e^{-x}}.$$

2) La vida útil de cierto producto perecedero es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si X_1 y X_2 representan la vida útil de dos unidades de dicho producto, seleccionadas al azar, calcúlese $P(X_1 \leq 2,\ 1 \leq X_2 \leq 3)$.

3) La variable aleatoria que da la distancia al centro en centímetros cuando se lanza un dardo a una diana (supuesta de radio infinito) tiene como función de densidad

$$f(x) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\pi(1+\alpha x^2)} \qquad \text{para} \qquad x > 0,$$

donde $\alpha > 0$ es una constante que depende de la puntería del lanzador (Nota: Esto es una simplificación con respecto al modelo matemático comúnmente aceptado).

a) Comprobar que f es función de densidad. (*Indicación*: recuérdese que $\int_0^\infty dx/(1+x^2) = \arctan\infty - \arctan 0 = \pi/2$).

b) Para un lanzador de puntería $\alpha = 3/16$, ¿cuál es la probabilidad de que un dardo se quede a más de 4 cm del centro?

c) ¿Cuántas dardos debería emplear el lanzador anterior para tener una probabilidad mayor del 90 % de que al menos uno de ellos quede a distancia menor que 4/3 cm del centro?

d) Los lanzadores con más puntería, ¿tienen α mayor o menor?

4) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x(2-x), & \text{si } x \in [0,2] \\ 0, & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$$

a) Calcular la constante α.

b) Calcular la probabilidad de que X tome valores entre 0 y 1.

c) Calcular $E[X]$ y $V[X]$.

5) Se tira una moneda 4 veces y se considera la variable aleatoria que cuenta el número de cruces. Hallar su esperanza y su varianza.

6) Un conocido resultado teórico (la desigualdad de Chebyshev) implica que para cualquier variable aleatoria con esperanza $E[X]$ y varianza $V[X]$, la probabilidad de que

Los números entre corchetes indican problemas del libro de J. de la Horra.

$|X - E[X]| > 2\sqrt{V[X]}$ es siempre menor o igual que el 25 %. Comprobar esta afirmación en los dos problemas anteriores.

7) Un barco debe esperar para entrar en un puerto hasta que la luz de un faro de periodo un minuto ilumine la entrada. Hallar la función de densidad y la función de distribución de la variable aleatoria que da la suma de los tiempos de espera en dos entradas independientes. Representarlas gráficamente.

8) Sean las variables aleatorias independientes X e Y con funciones de densidad f y g respectivamente, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular *a*) $E[X+Y]$, *b*) $E[2XY]$, *c*) $V[2X-Y]$.

9) [§3.13] Una pareja decide encontrarse en un lugar prefijado entre las tres y las cuatro de la tarde, de forma que el primero que llegue sólo esperará al otro durante 15 minutos. Suponiendo que los momentos de llegada de ambos al lugar son independientes y se distribuyen uniformemente entre las tres y las cuatro, calcúlese la probabilidad de que no se encuentren.

10) [§5.7 mod] Dos características, X e Y, son variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha y e^{-2x} e^{-y} & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de α. ¿Son independientes X e Y?
b) Calcular la esperanza de XY.

11) [§5.8] Dos sustancias, A y B, se encuentran en la sangre en cantidades X e Y, respectivamente. Estas cantidades varían de un individuo a otro. La densidad conjunta de ambas es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{81} x y^2 & \text{si } 0 < x < 3,\ 0 < y < 3 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Calcúlese:
a) La densidad marginal de Y y la esperanza de Y.
b) La probabilidad de que, en un individuo tomado al azar, haya más sustancia A que B.

12) Demostrar las siguientes propiedades de esperanzas y varianzas de variables aleatorias. Para simplificar, supóngase que las variables aleatorias son continuas y tienen función de densidad.

a) $E[kX] = kE[X]$, *b*) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$, *c*) $V[kX] = k^2 V[X]$.