# Métodos Estadísticos en ingeniería 28/03/2007 Mod. A

**1.** Utilizando la distribución normal, aproximar la probabilidad de que al lanzar una moneda un millón de veces el número de caras y de cruces difieran en más de 500.

**2.** Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si $f(x)$ es función de densidad, ¿lo es $2f(2x)$?

b) Dada una colección de datos $x_1, x_2, \ldots, x_N$, ¿qué se puede decir de ellos si su desviación típica es cero?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados sus puntuaciones sumen 10?

**3.** En una población el 40 % son rubios y el 60 % morenos. Entre los rubios, la mitad tienen los ojos azules, mientras que entre los morenos sólo el 30 %. Se elige una persona al azar, sabiendo que tiene los ojos azules ¿cuál es la probabilidad de que sea rubio?

# Métodos Estadísticos en ingeniería 28/03/2007 Mod. B

**1.** En un pueblo hay dos partidos: el 30 % son del partido $A$ y el resto del $B$. Entre los del partido $A$, la mitad aprueba la construcción de un hotel, y entre los del partido $B$ sólo están de acuerdo la quinta parte. Se elige una persona al azar, sabiendo que aprueba la construcción del hotel ¿cuál es la probabilidad de que sea del partido $B$?

**2.** Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados sus puntuaciones sumen 4?

b) Si $F(x)$ es una función de distribución, ¿lo es siempre $F(x^2)$?

c) Dada una colección de datos $x_1, x_2, \ldots, x_N$, ¿qué se puede decir de ellos si su desviación típica es cero?

**3.** Lanzamos un dado un millón de veces. Utilizando la distribución normal, aproximar la probabilidad de que salgan más de 500300 números pares.

# Métodos Estadísticos en ingeniería

10/04/2007 MOD. C

**1.** En cierta disciplina deportiva el 5 % de los competidores emplean sustancias no autorizadas. El control *antidoping* detecta las sustancias en estos competidores en un 90 % de los casos. Como contrapartida, un 3 % de las veces el control da falsos positivos. Si escogiendo a un competidor al azar el control resulta dar positivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea un falso positivo?

**2.** Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Existe alguna variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ para la que se verifique $\sigma = 0$?

b) ¿Qué es más fácil, sacar exactamente un cinco al tirar un dado seis veces o sacar exactamente dos cincos al tirarlo doce veces?

**3.** Un gen tiene probabilidad $10^{-10}$ de sufrir una extraña mutación no hereditaria. Utilizando la distribución de Poisson, aproximar la probabilidad de que en la población mundial, que es de $6{,}7 \cdot 10^9$ habitantes, haya más de dos casos.

# Soluciones

Mod. A

**1.** Si dif $> 500$ entonces hay más de 500250 caras o cruces:

$$P(\text{dif} > 500) = P(\text{caras} > 500250) + P(\text{cruces} > 500250) = 2P(\text{caras} > 500250)$$

Si $X$ es la variable aleatoria que cuenta el número de caras, $X \sim B(n,p)$ con $n = 10^6$, $p = 1/2$. Se aproxima por una normal $N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(500000, 500)$. Tipificando, si $Z = (X - 500000)/500$

$$\begin{aligned} P(X > 500250) &= P\big(Z > (500250 - 500000)/500\big) = P(Z > 0{,}5) \\ &= 1 - P(Z \leq 0{,}5) \approx 1 - (\frac{1}{2} + 0{,}1915) = 0{,}3085 \end{aligned}$$

y se tiene $P(\text{dif} > 500) \approx 0{,}6170$.

**2.** a) $\int_{-\infty}^{\infty} 2f(2x)\ dx \overset{y=2x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} 2f(y)\frac{1}{2}\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ dy = 1$, si $f$ es función de densidad, por tanto $2f(2x)$ integra 1 (y evidentemente es no negativa por serlo $f$), así que es función de densidad.

b) Si $\sigma = 0$ entonces $0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$ y esto implica $x_i - \mu = 0$, es decir, que todos son iguales a la media.

c) Las posibilidades son $10 = 4+6,\ 5+5,\ 6+4$. Cada una de ellas tiene probabilidad $1/6^2$ (porque las puntuaciones de los dos dados son independientes) así pues el resultado es $3/6^2 = 1/12$.

**3.** $R$=ser rubio  $M$=ser moreno  $A$=tener ojos azules.
Según el enunciado:

$$P(R) = 0{,}4, \qquad P(M) = 0{,}6, \qquad P(A/R) = 0{,}5, \qquad P(A/M) = 0{,}3$$

y se nos pide $P(R/A)$. Por la fórmula de Bayes

$$P(R/A) = \frac{P(A/R)P(R)}{P(A/R)P(R) + P(A/M)P(M)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6} = 0{,}5263\ldots$$

Mod. B

**1.** $A$=ser del partido A  $B$=ser del partido B  $H$=aprobar el hotel.
Según el enunciado:

$$P(A) = 0{,}3, \qquad P(B) = 0{,}7, \qquad P(H/A) = 0{,}5, \qquad P(H/B) = 0{,}2$$

y se nos pide $P(B/H)$. Por la fórmula de Bayes

$$P(B/H) = \frac{P(H/B)P(B)}{P(H/B)P(B) + P(H/A)P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}3} = 0{,}4827\ldots$$

**2.** a) Las posibilidades son $4 = 1{+}3,\ 2{+}2,\ 3{+}1$. Cada una de ellas tiene probabilidad $1/6^2$ (porque las puntuaciones de los dos dados son independientes) así pues el resultado es $3/6^2 = 1/12$.

b) No lo es. Por ejemplo, $\lim_{x\to-\infty} F(x^2) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ y debería ser cero.

c) Si $\sigma = 0$ entonces $0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$ y esto implica $x_i - \mu = 0$, es decir, que todos son iguales a la media.

**3.** Si llamamos éxito a par, esto es una binomial $B(n,p)$ con $n = 10^6$ y $p = 1/2$ (la mitad de las puntuaciones en un dado son pares). Se aproxima por una normal $N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(500000, 500)$. Tipificando, si $Z = (X - 500000)/500$

$$\begin{aligned} P(X > 500300) &= P\big(Z > (500300 - 500000)/500\big) = P(Z > 0{,}6) \\ &= 1 - P(Z \le 0{,}6) \approx 1 - (\frac{1}{2} + 0{,}2257) \end{aligned}$$

y la aproximación buscada es 0,2743.

$\boxed{\text{MOD. C}}$

**1.** $D$=emplear sustancias $\qquad$ $N$=no emplearlas $\qquad$ $C$=control positivo.

Según el enunciado:

$$P(D) = 0{,}05, \qquad P(N) = 0{,}95, \qquad P(C/D) = 0{,}9, \qquad P(C/N) = 0{,}03$$

y se nos pide $P(N/C)$. Por la fórmula de Bayes

$$P(N/C) = \frac{P(C/N)P(N)}{P(C/N)P(N) + P(C/D)P(D)} = \frac{0{,}03\cdot 0{,}95}{0{,}03\cdot 0{,}95 + 0{,}9\cdot 0{,}05} = 0{,}3877\ldots$$

**2.** a) En ese caso, $\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx = 0$ y esto es imposible porque $f \ge 0$ con $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$ y $(x-\mu)^2 > 0$ (para $x \ne \mu$).

b) Las distribuciones son binomiales y las probabilidades:

$$P(\text{un cinco}) = \binom{6}{1}\frac{1}{6}\Big(\frac{5}{6}\Big)^5 = 0{,}4018\ldots \qquad P(\text{dos cincos}) = \binom{12}{2}\frac{1}{6^2}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{10} = 0{,}2960\ldots$$

Lo primero es más probable.

**3.** $B(n,p)$ se aproxima por una Poisson con $\lambda = np$. En nuestro caso $\lambda = 6{,}7\cdot 10^9\cdot 10^{-10} = 0{,}67$. Digamos que $X$ indica el número de casos:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \big(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\big).$$

aproximando por la distribución de Poisson, esto es

$$\begin{aligned} P(X > 2) &\approx 1 - (\frac{(0{,}67)^0 e^{-0{,}67}}{0!} + \frac{(0{,}67)^1 e^{-0{,}67}}{1!} + \frac{(0{,}67)^2 e^{-0{,}67}}{2!}) \\ &= 1 - e^{-0{,}67}(1 + 0{,}67 + (0{,}67)^2/2) = 0{,}305\ldots \end{aligned}$$