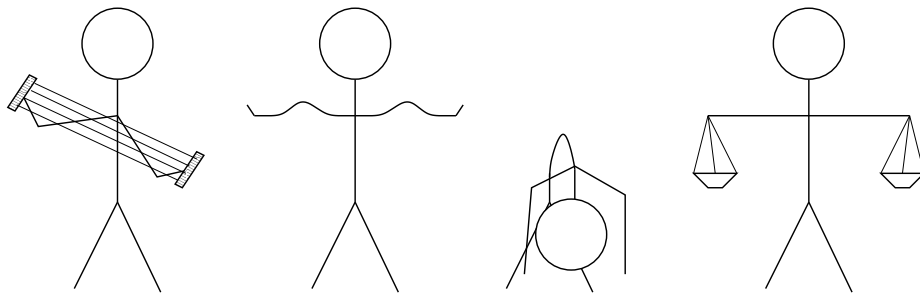


# Geometría IV

(tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso)



Fernando Chamizo Lorente

Curso 2007-2008

o r e n t e F e r n a n d o  
L 2007/2008 o  
o z i m a h C



# Prefacio

*Nota: Éste fue el prefacio del curso 2006-2007 antes de que se finalizasen los apuntes de la anterior versión.*

## SOBRE LA ASIGNATURA:

Tradicionalmente la asignatura optativa de geometría ha tenido pocos alumnos, sin que parezca que haya una influencia determinante de profesores u horarios. Este fenómeno se transmite también al Tercer Ciclo y en nuestro Departamento ha habido comparativamente pocos estudiantes que hayan comenzado el Doctorado con un interés principal en geometría. Aunque realmente no comprendo las causas de este fenómeno, nada me impide utilizar unas líneas para hacer un poco de propaganda. Es verdad que todos los profesores en distintos foros: el primer día de clase, en los ajustes de planes de estudio, en los informes para solicitar financiación, etc. afirman honestamente que su materia es bellísima e importantísima. En mi caso tópicos parecidos, menos radicales, tienen un valor diferente, puede que más ingenuo y a la vez más imparcial, cuando los aplico a la Geometría IV porque esta no es mi materia, soy sólo un aficionado.

Quisiera incidir en que, a mi juicio, parte de la belleza de este curso de geometría es que conjuga varios temas que aparecen a lo largo de la licenciatura. Versando sobre geometría diferencial, evidentemente el análisis, en su versión primitiva de integrales y derivadas, aparece por doquier. Por fin tendremos una noción clara de las formas diferenciales que habían despuntado en varias asignaturas así como una formulación general del teorema de Stokes. La topología, tal como se veía en segundo parecía ajena al mundo diferencial pero durante el curso comprobaremos lo erróneo de este prejuicio y podremos resolver en el entorno geométrico algunos problemas que se resistían a los rudimentos de la homotopía. De hecho si uno quiere asomarse al apasionante mundo de la topología algebraica, puede encontrar más sencillo comenzar a mirar por la ventana de la geometría. El álgebra lineal, cómo no, también se explota y amplía en este curso y conceptos abstractos como el de espacio dual se harán ahora más tangibles. Si alguien tiene interés en la física matemática, los conocimientos de geometría son imprescindibles y en particular la relatividad general se puede deducir de modo geométrico a partir de unos supuestos básicos.

El párrafo anterior puede dar una idea de que la asignatura es muy difícil porque engloba muchas cosas de muchas asignaturas. Cada uno puede sacar sus conclusiones al final de curso pero indudablemente es mejor y más fácil aprender ideas generales que recordar una miriada de casos particulares. Por poner un ejemplo, en el bachillerato, al menos en el antiguo, parecía que había un montón de tipos de límites y de reglas para calcularlos, pasado el tiempo podemos hacer casi todos los ejercicios que nos proponían sin siquiera escribir una línea en un papel.

## SOBRE EL CONTENIDO DE LOS APUNTES:

Como esta asignatura es optativa y de ocupación muy limitada, cabe cierta libertad sobre los contenidos que he reflejado en los apuntes. En los últimos años la asignatura se ha centrado en la topología diferencial [GoG] recuperando temas básicos de topología algebraica que desaparecieron de la licenciatura cuando se redujo su duración. Probablemente, los alumnos encontrarían más atractivos esos temas que los de topología general que ocupan casi todo el curso de segundo pero no se puede correr sin aprender a gatear.

He tomado la decisión de reducir los contenidos recientes de la asignatura a poco más de un capítulo para poder tratar otros temas que continúan en cierta manera la Geometría III recogida en [Di] y [GoJ], aprovechando parcialmente material propio anterior, en especial de un curso de relatividad general [Ch] que impartí hace años en la asignatura de Seminario. No estoy convencido en absoluto de que este enfoque sea adecuado ni quiero sugerirlo como una orientación para el futuro. Es más, después de que llevo escritas una parte de estas notas echo de menos la claridad de [GoG] tanto en los objetivos como en la exposición. Sí que es cierto que mi planteamiento liga diferentes visiones de la asignatura y alguien podría considerar positiva esta síntesis.

Fernando Chamizo  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Madrid

Febrero 2007

# Bibliografía

- [Ab] E.A. Abbott. *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Dover Publications thrift edition, 2007.
- [Bi-Go] R.L. Bishop, S.I. Goldberg. *Tensor analysis on manifolds*. Dover Publications, Inc., New York, 1980.
- [Bu-Gi] K. Burns; M. Gidea. *Differential geometry and topology*. With a view to dynamical systems. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC 2005.
- [Ch] F. Chamizo. Seminario 2001 (una odisea en el espacio-tiempo). Disponible en formato PDF en la página web [www.uam.es/fernando.chamizo/seminario.html](http://www.uam.es/fernando.chamizo/seminario.html), 2002.
- [Di] A. Díaz. Introducción a las variedades diferenciables. Disponible en formato PDF en la página web [www.uam.es/diaz.miranda](http://www.uam.es/diaz.miranda), 2003.
- [Do-He] J.R. Dorronsoro, E. Hernández. *Numeros Grupos y Anillos* Addison-Wesley Iberoamericana–UAM, Madrid, 1996.
- [Fe-Le-Sa] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands. *Feynman Física*, V. II. Fondo educativo interamericano 1972.
- [Ga-Ru] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz. *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*, 2ª edición. Editorial Sanz y Torres, Madrid, 2005.
- [GoG] G. González. *Geometría IV (notas provisionales del curso 2005/06)*. Disponible en [www.uam.es/gabino.gonzalez/notas2006.pdf](http://www.uam.es/gabino.gonzalez/notas2006.pdf), 2006.
- [GoJ] J. Gonzalo. *Variedades y Geometría: un curso breve*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2005.
- [Gr-Ha] M.J. Greenberg, J.R. Harper. *Algebraic topology. A first course*. Benjamin/Cummings, 1981.
- [Hi] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, 1976.

- [Ja] K. Jänich. *Vector analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Ko] C. Kosniowski. *A first course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 1980.
- [Ku] A.C. Kurosch. *Curso de álgebra superior*. Segunda edición. Mir, Moscú, 1975.
- [Mu] J.R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [ON] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., New York, 1983.
- [Sp1] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [Sp1t2] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [Sp2] M. Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverté, Barcelona, 1982.
- [Wa] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer Verlag, 1983.