# Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Por qué un cilindro tiene curvatura de Gauss nula cuando es obvio que está curvado?

ii) ¿Cuáles son las componentes del tensor de Riemann para $\mathbb{R}^2$ si usamos coordenadas polares?

iii) ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento? Siempre se puede encontrar una carta tal que los símbolos de Christoffel se anulen en un punto, por tanto el tensor de curvatura será nulo en dicho punto. Pero si se anula usando una carta se anula usando cualquiera. Repitiendo el argumento en cada punto se deduce que el tensor de curvatura es siempre idénticamente nulo.

iv) ¿Por qué $R^{ij} = R^{ji}$ se sigue de $R_{ij} = R_{ji}$?

**2)** Demostrar que no es posible encontrar una carta de $S^2$ (dotada de la métrica usual) de forma que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea una base ortonormal de $T_p(M)$ para todo $p$ en un abierto. ¿Cuál debe ser el tensor de curvatura para la variedades riemannianas que tienen el análogo $n$-dimensional de esta propiedad?

**3)** En una variedad consideramos las métricas $g_{ij}dx^i dx^j$ y $\lambda\ g_{ij}dx^i dx^j$ donde $\lambda$ es una constante.

a) Encontrar qué relación hay entre los tensores de Riemann correspondientes a ambas métricas.

b) Responder a la pregunta anterior para la curvatura escalar.

**4)** Demostrar que $R^i_{ikl} = 0$ y que $R^i_{jki} = -R_{jk}$.

**5)** Hallar el tensor de Riemann en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dotado con la métrica $dx^2 + y^2 dy^2$ y explicar el resultado.

**6)** Hallar todas las componentes del tensor de Ricci para el semiplano de Poincaré $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y > 0\}$ que tiene por métrica $y^{-2}(dx^2+dy^2)$. *Indicación*: De ejercicios anteriores sabíamos que los únicos símbolos de Christoffel no nulos son $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = -y^{-1}$.

**7)** Hallar la curvatura escalar en el ejercicio anterior y comprobar la relación de sus derivadas parciales con la derivada covariante del tensor de Ricci.

**8)** Comprobar que con la métrica $B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\ d\varphi^2$, se cumple la igualdad $R_{1212} = rB'/(2B^2)$.

**9)** Demostrar que para las métricas de la forma $A(x, y)dx^2 + B(x, y)dy^2$ se tiene $R_{12} = R_{21} = R^{12} = R^{21} = 0$. *Indicación*: No es necesario calcular los símbolos de Christoffel, sólo usar las simetrías del tensor de Riemann.