Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Es cierto que el *pullback* envía formas cerradas en formas cerradas y formas exactas en formas exactas?

ii) Si M es una variedad n-dimensional compacta orientable con dos componentes conexas, ¿Es $[\omega] \in H^n(M) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$ un isomorfismo?

iii) ¿Y si M es variedad con borde, ¿está $[\omega] \in H^n(M) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$ bien definido en general?

iv) Si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta, ¿qué se puede decir de A y B?

v) ¿Por qué en una sucesión exacta corta f_1 debe ser inyectiva y f_2 sobreyectiva?

vi) ¿Es posible aplicar la sucesión de Mayer-Vietoris cuando $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ no son abiertos?

2) Demostrar que la aplicación $H^k(M) \times H^l(M) \longrightarrow H^{k+l}(M)$ dada por $([\omega], [\eta]) \mapsto [\omega \wedge \eta]$ está bien definida; es decir, que si $[\omega'] = [\omega]$ y $[\eta'] = [\eta]$ entonces $[\omega' \wedge \eta'] = [\omega \wedge \eta]$. Nota: Esto permite definir un anillo a partir de los grupos de cohomología.

3) Demostrar que M y $M \times \mathbb{R}$ son variedades homótopas.

4) Sea M una subvariedad de N (es decir, $i : M \longrightarrow N$ es una función C^∞). Se dice que M es un *retracto por deformación fuerte* de N si existe una homotopía $F : N \times [0, 1] \longrightarrow N$ tal que para todo $x \in N$ y $a \in M$ se cumple $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in M$ y $F(a, t) = a$. Demostrar que M y N son homótopas y por tanto tienen los mismos grupos de cohomología.

5) Calcular los grupos de cohomología de $\mathbb{R}^3$ menos el eje Z.

6) Calcular los grupos de cohomología del toro $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$ expresándolo como una unión de dos cilindros curvados.

7) Sea $f : \mathbb{T} \longrightarrow S^n$. Demostrar que no existe $g : S^n \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que $g \circ f$ sea la identidad. *Indicación*: Considerar la acción de f^* y g^* en H^1.

8) Calcular los grupos de cohomología de un toro doble, (es decir, una variedad difeomorfa a una esfera con dos asas). *Indicación*: Un toro menos un punto es difeomorfo a un toro menos un disco.

9) Calcular los grupos de cohomología de un toro menos dos puntos. *Indicación*: Esto es la intersección de dos toros menos un punto.

10) Demostrar que si $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de espacios vectoriales entonces $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \mathrm{Im}\, f_2 \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, f_2 \xrightarrow{i} V_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$, con i la inclusión, también son sucesiones exactas.

11) Probar que el teorema del punto fijo de Brouwer no es cierto si se reemplaza la bola cerrada por una bola abierta.

12) Para cada n impar, encontrar una $f : S^n \longrightarrow S^n$ tal que $f(x) \neq \pm x$ para todo x.