Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
i) ¿Por qué una variedad es una variedad con borde?
ii) ¿Por qué $\partial(\partial M)=\emptyset$?
iii) ¿Era cierto en la topología de segundo que $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}A)=\emptyset$?
iv) Si ∂M es orientable, ¿debe serlo M?

2) Demostrar que si M es una variedad con borde, usando restricciones de las cartas, $M-\partial M$ y ∂M tienen estructura de variedad de dimensiones n y $n-1$, respectivamente.

3) Comprobar el teorema de Stokes cuando $\omega=j^*(z\ dx+x\ dy+y\ dz)$ y $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z=1\ \ z\geq 0\}$, donde $j:M\longrightarrow\mathbb{R}^3$ es la inclusión.

4) Hallar el área limitada por la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ usando el teorema de Green. Dar también un argumento geométrico sencillo para deducirla a partir del área del círculo.

5) Se dice que $\vec{F}:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ es *conservativo* si existe $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $\nabla f=\vec{F}$.
a) Demostrar que si $\mathcal{U}$ es contractible entonces $\vec{F}$ es conservativo si y sólo si $\mathrm{rot}\ \vec{F}=\vec{0}$.
b) Sea $\vec{F}(x,y,z)=(-y/(x^2+y^2),x/(x^2+y^2),z^2)$ definido en $\mathcal{U}=\{1/2<x^2+y^2<2\}$. Comprobar que $\int_C\vec{F}\neq 0$ si $C=S^1\times\{0\}$ y sin embargo $\mathrm{rot}\ \vec{F}=\vec{0}$. Concluir que $\mathcal{U}$ no es contractible.

6) Sea $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3$ un abierto contractible a un punto, probar los siguientes teoremas del cálculo vectorial:
a) Si $\vec{F}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ es un campo vectorial con $\mathrm{rot}\ \vec{F}=\vec{0}$ entonces existe una función $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $\nabla f=\vec{F}$.
b) Si $\vec{F}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ es un campo vectorial con $\mathrm{div}\ \vec{F}=\vec{0}$ entonces existe otro campo $\vec{G}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{rot}\ \vec{G}=\vec{F}$.
c) Para cada función $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ existe un campo vectorial $\vec{F}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{div}\ \vec{F}=f$.

7) Sea $\vec{F}(\vec{x})=\vec{x}/\|\vec{x}\|^3$ para $\vec{x}\in\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}$.
a) Calcular $\int_{S^2}\vec{F}$ donde en S^2, la esfera unidad, se supone la orientación correspondiente a la normal exterior. ¿Por qué la integral no se anula si $\mathrm{div}\ \vec{F}=0$?
b) Sea $M=\{a\leq\|\vec{x}\|\leq b\}$, $0<a<b$. Calcular $\int_{\partial M}\vec{F}$.
c) Calcular $\int_S\vec{F}$ para cualquier superficie esférica en $\mathbb{R}^3$ con $\{\vec{0}\}\not\in S$.

8) Sea $\omega=2xyze^{x^2}\ dx+(ze^{x^2}+2ye^{y^2})\ dy+ye^{x^2}\ dz\in\Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Comprobar que es cerrada. Hallar $\eta\in\Omega^0(\mathbb{R}^3)$ (esto es, una función) tal que $d\eta=\omega$.

9) Sea $\omega=(y\ dx-x\ dy)/(ax^2+by^2)\in\Omega^1(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$, $a,b>0$.
a) Comprobar que es cerrada.
b) Integrándola a lo largo de una elipse adecuada, probar que no es exacta.
c) Deducir que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ no son difeomorfos.

10) Si una pelota de radio R semisumergida deja fuera del agua un ángulo α, ¿Cuánto pesa? Nota: la densidad del agua es $\rho = 1$ gr/cm^3.