Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si $\omega(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2$, ¿cuánto vale $\omega(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$?

ii) Si M es una variedad n-dimensional y $\omega \in \Omega^{n-3}(M)$ y $\eta \in \Omega^1(M)$, ¿cuánto vale $d\omega \wedge \eta \wedge d\eta$?

iii) ¿Por qué se puede asegurar que el producto exterior de formas alternadas es realmente una forma alternada?

iv) Si $\omega = \widetilde{\varphi}^1 \wedge \widetilde{\varphi}^2 + \widetilde{\varphi}^3 \wedge \widetilde{\varphi}^4$ con $\widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2, \widetilde{\varphi}^3, \widetilde{\varphi}^4 \in V^*$, ¿cómo se pueden simplificar las expresiones $\omega \wedge \omega$ y $\omega \wedge \omega \wedge \omega$?

v) ¿Por qué por cada sumando no nulo en la definición del producto exterior hay $k!l!$ con el mismo valor?

2) Para $n > 1$ definamos en $\mathbb{R}^n$ con la base usual el *producto vectorial generalizado* de $n-1$ vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}$ como cero si son linealmente dependientes, y como el vector $\vec{w}$ que cumple

$$\vec{x} \cdot \vec{w} = \det(\vec{x}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}) \qquad \text{para todo} \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

si son linealmente independientes. Nótese que para $n = 3$ el producto vectorial usual tiene esta propiedad y está caracterizada por ella.

a) Demostrar que este producto vectorial está bien definido. Es decir, que no pueden existir dos $\vec{w}$ con la propiedad anterior. Probar también que el producto vectorial generalizado es siempre ortogonal a cada uno de los vectores de partida.

b) Demostrar que la función M_i que asigna a $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1})$ la i-esima coordenada de su producto vectorial generalizado cumple $M_i \in \mathrm{Alt}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

c) Expresar M_i en términos de productos exteriores de elementos de la base dual de la usual. *Indicación:* Tómese como $\vec{x}$ el i-ésimo vector de la base canónica.

3) Si $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$, es decir, si ω es una función, entonces los coeficientes de $d\omega$ vienen dados por el gradiente (usamos la carta trivial). Encontrar relaciones similares con el rotacional y la divergencia en $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ y $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

4) Comprobar en $\mathbb{R}^3$ (con la carta trivial) la relación $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$ para las uno formas $\omega = x^2y^2z^2dy + x^3dz$ y $\eta = zdy + dz$.

5) Sea $\omega = dx \wedge dy \in \Omega(\mathbb{R}^2)$. Para $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ calcular $\omega(df(\frac{\partial}{\partial x}), df(\frac{\partial}{\partial y}))$ donde df es la aplicación tangente.

6) Sea $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ uno formas alternadas. Probar que son linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n = 0$. *Indicación:* Si fueran independientes, serían base de un subespacio de V^* y tendrían una base (bi-)dual en V.

7) Sea $\omega = \sum f_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(M)$ donde $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Demostrar que la componente $j_1, j_2, \ldots, j_{k+1}$, con $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, del tensor $d\omega$ es

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial f_{j_1 \ldots \widehat{j_s} \ldots j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}}$$

donde el circunflejo indica que se omite ese índice.

8) Probar $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$, para $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$, $\eta \in \mathrm{Alt}^l(V)$. Probar también la propiedad asociativa $(\omega \wedge \eta) \wedge \tau = \omega \wedge (\eta \wedge \tau)$ a partir de la definición.