Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si $T = T(\vec{x}, \vec{y})$ y $S = S(\vec{x}, \vec{y})$ son tensores, ¿lo es $R(\vec{x}, \vec{y}) = T(\vec{x}, \vec{y}) \cdot S(\vec{x}, \vec{y})$?

ii) ¿Es $T(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$ una aplicación bilineal?

iii) ¿Es el producto tensorial conmutativo?

iv) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores en $\mathbb{R}^3$ con la base canónica le asigna la primera coordenada de su producto vectorial?

v) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores en $\mathbb{R}^2$ con la base canónica le asigna el área del paralelogramo que determinan?

vi) ¿Cuántas componentes tiene un tensor de tipo (r, s) con $V = \mathbb{R}^m$?

vii) ¿Por qué si las componentes de dos tensores coinciden en una base deben coincidir en todas?

2) Demostrar que, fijada una base, todo tensor dos veces covariante es de la forma $T(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y}$ con A una matriz.

3) Hallar cuántas componentes nulas y cuántas no nulas tiene el tensor determinante. Estudiar también cuántas son positivas.

4) Si multiplicamos tensorialmente unos cuantos elementos de $\mathcal{B}$ y otros de $\mathcal{B}^*$, hallar cuántas componentes no nulas tiene el tensor resultante. Usar este hecho para probar que todo tensor se puede escribir como combinación lineal de estos productos tensoriales.

5) Para $V = \mathbb{R}^3$ consideremos un tensor de tipo $(0, 3)$, otro de tipo $(1, 2)$ y otro de tipo $(2, 1)$, cuyas componentes, digamos ϵ_{ijk}, ϵ^i_{jk} y ϵ^{ij}_k, en la base canónica son: 0 si i, j, k no es una reordenación de $1, 2, 3$; 1 si i, j, k es una permutación par de $1, 2, 3$ (esto es, se ordena con un número par de intercambios) y -1 si i, j, k es una permutación impar de $1, 2, 3$. Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$, explicar qué objetos matemáticos bien conocidos representan las cantidades $\epsilon^{ij}_k \partial F^k / \partial x^j$, $\epsilon^i_{jk} v^j w^k$ y $\epsilon_{ijk} u^i v^j w^k$.

6) Sea un endomorfismo $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, con $A = (a^i_j)$, en $\mathbb{R}^n$.

a) Dar una demostración tensorial de que la traza a^i_i es invariante por cambios de base.

b) Probar que $a^i_i a^j_j - a^i_j a^j_i$ también es invariante e identificar esta cantidad en términos de trazas de matrices.

7) Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$ y sean g_{ij} las componentes del tensor métrico usual, es decir, $g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$. Demostrar que

$$|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)| = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Indicación: Cambiar a una base ortonormal y escribir g_{ij} en términos de la matriz de cambio de base.