

# Capítulo 2

## Topología diferencial

### 2.1. El teorema de Stokes

La pregunta que conduce al teorema de Stokes<sup>1</sup> desde el punto de vista matemático es muy natural: ¿cuál es el teorema fundamental del cálculo en varias variables? A este nivel, sobreentendemos “varias variables” como variedades, pero como orgullosos habitantes de  $\mathbb{R}^n$  en primera aproximación, nos sentiremos más cómodos haciendo algunas cuentas en el ámbito puramente euclídeo. El punto de partida es el teorema fundamental del cálculo en  $I = [0, 1]$

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'.$$

En  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$  uno podría aplicar este resultado dos veces para expresar  $\int_{I^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  en términos de los valores de  $f$  en los vértices de  $I^2$  y lo mismo podríamos hacer en  $I^n$  con derivadas  $n$ -ésimas. Sin embargo lo que queremos es una fórmula con derivadas primeras, como hay varias derivadas parciales tendremos que escribir una combinación de ellas, pero entonces la integral doble nos lleva en todo caso no a la función sino a una integral suya. ¿Qué tipo de generalización estamos buscando? El teorema fundamental del cálculo se puede interpretar diciendo que al integrar  $f'$  en  $I$  se obtiene (una diferencia de)  $f$  evaluada en la frontera de  $I$ , queremos algo en ese sentido interpretando que para “evaluar” en la frontera en dimensiones superiores hay que integrar porque hay infinitos puntos en ella. Por ejemplo, en  $I^2$  se cumple

$$\int_0^1 f_1(x, 0) dx + \int_0^1 f_2(1, y) dy - \int_0^1 f_1(x, 1) dx - \int_0^1 f_2(0, y) dy = \int_{I^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

---

<sup>1</sup>En realidad el teorema de Stokes no se debe a Stokes y, apurando, históricamente no es un solo resultado sino un compendio de teoremas de varios autores resumidos en una fórmula simple. El nombre proviene en parte de que un caso particular (también llamado teorema de Stokes) apareció en una competición matemática organizada por G. Stokes (ver [Sp2] VII-VIII), un físico y matemático del siglo XIX conocido sobre todo por su contribución a la mecánica de fluidos.

Llamando  $C$  a la frontera de  $I^2$  y despreocupándonos de las esquinas, tras las fórmulas de cursos pasados que recordamos en la sección anterior se puede escribir esto como:

$$\int_C \vec{F} dy = \int_{I^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{con} \quad \vec{F} = (f_1, f_2)$$

donde la orientación en  $C$  es la habitual, contraria al sentido horario. Nótese que podría ocurrir que  $\partial f_2/\partial x - \partial f_1/\partial y$  fuera extremadamente sencillo, por ejemplo cero, y que sin embargo no supiéramos calcular por separado las cuatro integrales en las que descompone  $\int_C \vec{F}$ .

En  $I^3$  también podemos encontrar una combinación apropiada de las derivadas parciales sobre el borde de  $I^3$ . En general el teorema de Stokes responde al esquema:

$$\int_{\text{borde}} \text{funciones} = \int_{\text{variedad}} \text{derivadas de funciones.}$$

Y esta fórmula adquirirá un aspecto muy simple con la notación de las formas diferenciales y gracias a ella su demostración es el teorema fundamental del cálculo<sup>2</sup>. Aunque sólo fuera para escribir está magnífica fórmula generalizadora, la introducción de las formas diferenciales estaría plenamente justificada.

Pero antes de nada hay unas preguntas básicas que tomar en consideración, las últimas líneas anticipan la solución a la tercera:

- ¿Cómo se integra en una variedad?
- ¿Cómo se define el borde una variedad?
- ¿Qué tipo de derivadas hay que considerar?

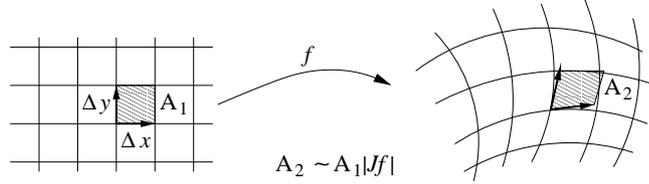
Vayamos con la primera. Ciertamente la respuesta no es inmediata porque en los cursos de análisis de primero o en segundo aparecieron integrales sobre curvas y superficies y las fórmulas que las definían no tenían aparentemente demasiado en común. Por ejemplo, ¿por qué al integrar sobre una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  había que hacer cálculos con el vector normal y sin embargo para curvas había que emplear el vector tangente? Ahora que hemos repasado los rudimentos de la geometría diferencial sabemos que hagamos lo que hagamos lo crucial es que las definiciones no dependan de las cartas empleadas. Tratando de averiguar por qué se integra como se integra, pensemos primero en las sencillas integrales en  $\mathbb{R}^n$  (no tan sencillas después del estudio exhaustivo en el curso de teoría de la medida). Si  $f$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , bajo las condiciones técnicas de rigor, por ejemplo  $g$  con soporte compacto, se tiene la fórmula de cambio de variable

$$\int g = \int g \circ f |\det(Jf)|$$

---

<sup>2</sup>En [Sp2] p.96 leemos: “El teorema de Stokes goza de tres importantes atributos que son propios de la mayoría de los grandes teoremas: 1) Es trivial. 2) Es trivial porque los términos que aparecen en él han sido definidos de manera adecuada. 3) Tiene consecuencias significativas”.

donde  $Jf$  es la matriz jacobiana de  $f$ . La explicación intuitiva es muy sencilla: en cuadrados infinitesimales  $f$  se aproxima por una aplicación lineal de matriz  $Jf$  y el determinante justamente mide su variación de volumen.



Si queremos dar una definición invariante de la integral necesitamos objetos que se multipliquen por el determinante jacobiano al cambiar de coordenadas. Las formas diferenciales satisfacen este requerimiento y su razón de ser original es que constituyen los objetos matemáticos que se pueden integrar. Nótese que si

$$\omega = g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega(\mathbb{R}^n) \quad \text{con } g = g(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

y hacemos el cambio  $x^j = f^j(y^1, y^2, \dots, y^n)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , entonces  $dx^j = \frac{\partial f^j}{\partial y^i} dy^i$  y sustituyendo y utilizando las propiedades de los determinantes

$$\omega = \det(Jf) g \circ f dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Entonces tiene sentido definir la integral de  $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ , digamos de soporte compacto<sup>3</sup> si queremos evitar problemas con la existencia, como

$$(2.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Antes de seguir, generalicemos los cambios de variable incluso cuando  $f$  no es un difeomorfismo.

**Definición:** Sean  $M$  y  $N$  variedades y  $f : M \rightarrow N$ . Se llama *imagen recíproca* (o *pullback*) a la aplicación lineal  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  dada por

$$f^*\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \omega(df(\vec{v}_1), df(\vec{v}_2), \dots, df(\vec{v}_k)) \quad \text{para } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in T_p(M).$$

Si  $\vec{v}_j \in T_p(M)$  entonces  $df(\vec{v}_j) \in T_{f(p)}(N)$ , por tanto si  $\omega$  está soportada en un entorno de un punto,  $f^*\omega$  lo está en entornos de sus preimágenes for  $f$ . En coordenadas todo está más claro,

$$\omega = g_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \Rightarrow f^*\omega = g_{i_1 i_2 \dots i_n} \circ f d(x^{i_1} \circ f) \wedge d(x^{i_2} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x^{i_n} \circ f).$$

<sup>3</sup>Cuando hablamos del soporte de  $\omega = g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$  o de su no anulación en un punto nos referimos a los conceptos análogos para  $g$ . Esto es coherente porque los cambios de carta multiplican  $g$  por una función no nula.

Si  $f$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  con  $\det(Jf) > 0$ , la fórmula de cambio de variable es

$$(2.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f^* \omega.$$

**Ejemplo:** Consideremos  $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  con la carta trivial y  $N = S^1 \cap M$  con la carta  $(N, \theta)$  donde  $\theta$  es el ángulo normalizado en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Si  $f : M \rightarrow N$  es la proyección radial  $f(x, y) = (x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2})$  y  $\omega = g(\theta) d\theta \in \Omega^1(N)$ , entonces

$$\begin{aligned} f^* \omega &= g(\theta(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2})) d\theta(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= g(\arctan \frac{y}{x}) d(\arctan \frac{y}{x}) = g(\arctan \frac{y}{x}) \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Introdujimos en un ejemplo del capítulo anterior las transformaciones de Lorentz como un cambio de carta  $L : (t, x) \rightarrow (t', x')$  en  $\mathbb{R}^2$  dado por  $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ ,  $x' = \gamma(-vt + x)$  con  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  que dejaba invariante la métrica de Minkowski. Veamos que también  $dt' \wedge dx'$  queda invariante por la imagen recíproca:

$$L^*(dt' \wedge dx') = \gamma^2(dt - vc^{-2}dx) \wedge (-v dt + dx) = \gamma^2(dt \wedge dx + v^2 c^{-2} dx \wedge dt) = dt \wedge dx.$$

En el próximo capítulo veremos que una métrica en una variedad de dimensión  $n$  lleva asociada una  $n$ -forma, lo que explica la invariancia.

La imagen recíproca es claramente  $\mathbb{R}$ -lineal, ésta y otras propiedades menos evidentes se recogen a continuación. La última de ellas podría haberse usado para probar que la definición de la derivada exterior no depende de la carta escogida, porque  $(\phi \circ \psi^{-1})^* d\omega = d((\phi \circ \psi^{-1})^* \omega)$  (véase [GoJ] y [Bu-Gi] p. 243 para otra demostración).

**Lema 2.1.1** *La imagen recíproca satisface las siguientes propiedades:*

- 1)  $f^*(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda f^*\omega + \mu f^*\eta \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,
- 2)  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ ,
- 3)  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ ,
- 4)  $d(f^*\omega) = f^*d\omega$ .

*Demostración:* 1) Se sigue de la definición.

2) Recordando la definición de producto exterior la propiedad se vuelve tautológica: da igual aplicar  $df$  a unos vectores y ponerlos en un determinante que ponerlos en un determinante y después aplicar  $df$  a cada uno de ellos.

3) Por la regla de la cadena  $d(g \circ f) = dg \circ df$ . Nótese que el orden es el correcto. Por ejemplo para una forma  $\omega$   $(dg(df(\vec{v}))) = f^*(\omega(dg(\cdot)))(\vec{v}) = f^*(g^*\omega)(\vec{v})$ .

4) Si  $\omega \in \Omega^l(M)$ , es decir, si  $\omega$  es una función, es consecuencia de 3). Por el Corolario 1.4.2 cada  $k$  forma diferencial con  $k \geq 1$  se puede escribir como suma de términos del tipo  $\omega \wedge d\eta$  ( $\eta$  puede ser una función coordenada) con  $\omega \in \Omega^l(M)$  y  $\eta \in \Omega^m(M)$ ,

$l + m + 1 = k$ . Procedemos por inducción aplicada a cada uno de estos sumandos. Por la Proposición 1.4.3 y 2) se tiene

$$f^*(d(\omega \wedge d\eta)) = f^*(d\omega \wedge d\eta) = f^*d\omega \wedge f^*d\eta.$$

Por la hipótesis de inducción esto es  $d(f^*\omega) \wedge d(f^*\eta)$  que puede escribirse como

$$d(f^*\omega) \wedge d(f^*\eta) = d(f^*\omega \wedge d(f^*\eta)) = d(f^*(\omega \wedge d\eta))$$

donde se ha usado de nuevo la Proposición 1.4.3, la hipótesis de inducción y 2).  $\square$

Retomando el tema de la integración, podemos utilizar las cartas para definir la integral de una forma en un parche de una variedad. Concretamente, si  $(\mathcal{U}, \phi)$  es una carta de una variedad  $m$ -dimensional,  $M$ , y  $\omega \in \Omega^n(M)$ , digamos de soporte compacto incluido en  $\mathcal{U}$  para que no haya problemas al integrar, entonces se define

$$(2.3) \quad \int_{\mathcal{U}} \omega = \int_{\phi(\mathcal{U})} (\phi^{-1})^* \omega.$$

El segundo miembro, es una integral como la de (2.1). Por (2.2) con  $f = \phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$  y 3) del Lema 2.1.1, al cambiar la carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  por otra  $(\mathcal{V}, \tilde{\phi})$  el resultado es el mismo si  $\det(Jf) > 0$  (suponiendo que el soporte de  $\omega$  está en  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ).

Evidentemente la definición tiene sus limitaciones, pero si nos restringimos a variedades definidas por una sola carta obtenemos una versión unificada de las integrales que conocíamos hasta ahora. Sean  $C$ ,  $S$  y  $B$  una curva, una superficie y una región sólida definidas como subvariedades de  $\mathbb{R}^3$ , esto significa que la inclusión,  $i$ , en  $\mathbb{R}^3$  es una función  $C^\infty$ . En cada uno de los casos  $i^*$  pasará respectivamente 1-formas, 2-formas y 3-formas en  $\mathbb{R}^3$  a formas diferenciales que se pueden integrar en  $C$ ,  $S$  y  $B$  (cuyas dimensiones son 1, 2 y 3). Es decir, para curvas y superficies la definición natural de integral es<sup>4</sup>

$$\int_C i^*(F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz), \quad \int_S i^*(F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy)$$

y para una región sólida

$$\int_B i^*(f dx \wedge dy \wedge dz).$$

---

<sup>4</sup>El uso de superíndices en los coeficientes no es muy coherente con los convenios del capítulo anterior y viene motivado por el uso que se hace en Física de estas integrales para integrar campos vectoriales. En rigor, para curvas los  $F^i$  no son componentes de un vector sino de un covector (una forma) y para superficies, son un objeto todavía más complicado. Al igual que en el caso del gradiente que comentamos en el capítulo anterior, resulta que si uno se limita a movimientos del plano estas distinciones son irrelevantes.

Esta última integral no es otra cosa que  $\int_B f$  con el significado clásico y no entraña ningún misterio. Las otras dos dan lugar a las fórmulas bien conocidas para integrar campos en curvas y superficies y las denotaremos simplemente como  $\int_C \vec{F}$  y  $\int_S \vec{F}$ . Para adaptar la primera a  $\mathbb{R}^2$  basta omitir el término con  $dz$ .

Ejemplo: Supongamos que  $C$  tiene una sola carta  $(C, \phi)$  con  $\phi^{-1}(C)$  el intervalo  $I = (a, b)$ , comprobemos que la fórmula anterior para  $\int_C$  es la de cursos pasados. Escribiremos  $\sigma = i \circ \phi^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , esto es lo que se llama una parametrización de la curva, nótese de  $\text{Im } \sigma = C$ .

Por (2.3) y el Lema 2.1.1

$$\int_C i^*(F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz) = \int_I \sigma^*(F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz).$$

Si  $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  y  $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$  esto se puede escribir como

$$\int_I ((F^1 \circ \sigma)\sigma^{1'} + (F^2 \circ \sigma)\sigma^{2'} + (F^3 \circ \sigma)\sigma^{3'}) = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

De la misma forma si  $(S, \phi)$  es una carta global de  $S$  y  $\Phi = i \circ \phi^{-1} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización se puede probar también la fórmula clásica (ejercicio)

$$\int_S i^*(F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy) = \int_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) dudv$$

donde  $\vec{N}(u, v)$  es el vector normal  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ .

De nuestra definición se sigue que las integrales de línea y superficie no dependen de las parametrizaciones (de las cartas) escogidas una vez fijada una orientación siempre que los cambios de carta tengan jacobiano positivo. Además abre la puerta para poder considerar integrales en dimensiones superiores. ¿Cómo habría que integrar en una hipersuperficie  $H$  de  $\mathbb{R}^4$ ? Según el esquema anterior la fórmula es  $\int_H i^*(F^1 dy \wedge dz \wedge dt + F^2 dx \wedge dt \wedge dz + F^3 dt \wedge dx \wedge dy + F^4 dz \wedge dy \wedge dx)$ . Por supuesto tanto en la integración sobre superficies en  $\mathbb{R}^3$  como en ésta, la ordenación de los productos exteriores es arbitraria y modificarla equivale a cambiar de signo algunos  $F^i$ . La elegida aquí es sin embargo natural motivada por su interpretación física como flujos.

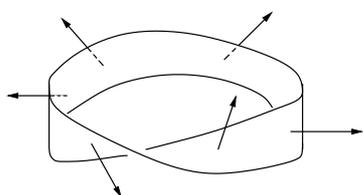
Para tener una definición completa de integral tenemos que resolver los problemas del signo del jacobiano al cambiar de carta y eliminar el extraño requerimiento que la forma diferencial viva en sólo uno de los abiertos de las cartas. Lo primero se resuelve por decreto, simplemente aceptamos la derrota y prefijamos un signo para los cambios de carta. Físicamente muchas veces ese signo expresa una dirección de lo que estamos integrando. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}$  no queremos hablar de la integral sobre  $[a, b]$  de una función sino de su integral de  $a$  a  $b$  ó de  $b$  a  $a$ . Las definiciones relevantes son:

**Definición:** Se dice que dos cartas  $(\mathcal{U}_1, \phi_1)$  y  $(\mathcal{U}_2, \phi_2)$  con  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$  tienen la misma orientación si  $\det(J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})) > 0$ . Una variedad  $M$  es orientable si existe una colección de cartas  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$  con  $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = M$  tales que cada par de ellas con  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$  tienen la misma orientación. En ese caso se dice que la colección de cartas conforma un atlas orientado.

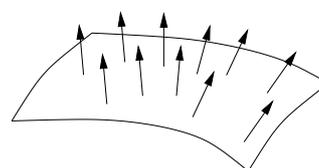
**Definición:** Una orientación de una variedad orientable  $M$  es una clase de equivalencia de la relación entre atlas orientados:  $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es atlas orientado.

Ejemplo: Las cartas  $(S^1 \cap \{y > 0\}, \phi_1)$  y  $(S^1 - \{(0, 1)\}, \phi_2)$  con  $\phi(x, y) = -x$  y  $\phi_2(x, y) = x/(1 - y)$  determinan un atlas orientado de  $S^1$  y por tanto una orientación, ya que para  $t \in (-1, 0) \cup (0, 1)$  se cumple  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(t) = t/(\sqrt{1 - t^2} - 1)$  que tiene derivada positiva.

Existen variedades no orientables, la más famosa de las que podemos ver a simple vista es la *banda de Möbius*: una banda retorcida y pegada para formar un anillo (que suponemos sin borde para respetar la definición de variedad). Es conocido de cursos anteriores que la orientación en superficies de  $\mathbb{R}^3$  está ligada a la existencia de campos de vectores normales y visualmente está claro que no es posible determinar una orientación porque al dar toda una vuelta los vectores normales cambian de sentido (véase [Ga-Ru] p. 110 o [GoG] para una demostración rigurosa). Aquí no entraremos en estas consideraciones.

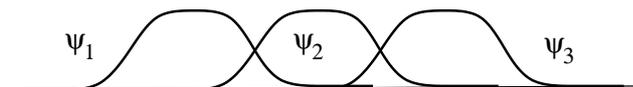


Banda de Möbius (no orientable)



Superficie orientable

Para no depender de una hipótesis tan extraña como que la forma diferencial viva en sólo uno de los abiertos de las cartas, los diferentes parches se pegan con un artificio teórico bien conocido: las *particiones de la unidad*. Recuérdese que una *partición de la unidad* subordinada a un recubrimiento abierto  $\bigcup \mathcal{U}_\beta = M$  es una colección de funciones  $\{\psi_\alpha\}$ ,  $C^\infty$  y  $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ , tales que: 1) En cada punto  $p \in M$  sólo hay un número finito de ellas con  $\psi_\alpha(p) \neq 0$  y su suma es uno. 2) Cada  $\psi_\alpha$  tiene soporte incluido en alguno de los  $\mathcal{U}_\beta$ .



Con esto ya estamos por fin preparados para tener una definición completa de integral sobre una variedad:

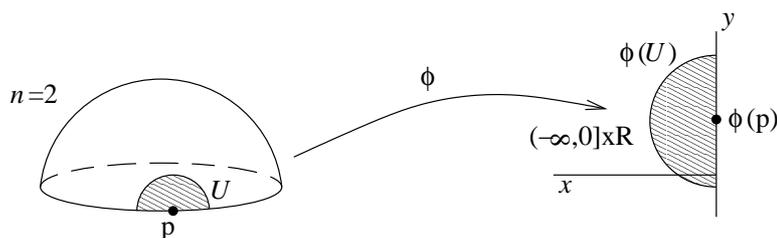
Dada una partición de la unidad  $\{\psi_\alpha\}$  subordinada al recubrimiento definido por los abiertos de todas las cartas de un atlas orientado, se define

$$(2.4) \quad \int_M \omega = \sum_\alpha \int \psi_\alpha \omega$$

donde cada  $\psi_\alpha \omega$  ya tiene el soporte compacto en el abierto de una carta y se puede por tanto integrar con (2.3). Siendo exigente, la notación  $\int_M \omega$  es un poco inadecuada porque el valor de la integral no depende sólo de  $\omega$  y  $M$  sino también de la orientación que se asigne a  $M$ ; este defecto viene heredado de la notación usual para las integrales de línea y superficie que está demasiado asentada como para cambiarla. No es difícil probar que fijada una orientación, el segundo miembro de (2.4) no depende del atlas orientado elegido ni de la partición de la unidad, es decir, que la definición es buena.

Insistimos en que las particiones de la unidad son únicamente un artificio teórico, en la práctica diaria de cursos de análisis pasados nunca se integró “de verdad” usando particiones de la unidad, simplemente se dividían las subvariedades en porciones, cada una con su carta, y si había trozos sin cubrir estaban parametrizados por conjuntos de medida cero y por tanto eran irrelevantes. No es posible copiar este método práctico en la definición teórica general porque las dificultades topológicas y de teoría de la medida serían insuperables debido a la posible estructura indómita de las fronteras de los abiertos de las cartas.

Ya sabemos integrar, con lo que hemos resuelto el primer paso para escribir el enunciado del teorema de Stokes. El segundo problema es la definición del borde de una variedad. El haber repetido tantas veces que las variedades se consideran objetos intrínsecos sin referencia a nada exterior deja poco espacio para asociar un borde a una variedad. El truco está en definir simultáneamente la variedad y su borde diciendo que esta nueva entidad conjunta está hecha con parches de  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  que es como un  $\mathbb{R}^n$  con borde.



**Definición:** Una *variedad con borde* de  $n$ -dimensional es el objeto obtenido cuando en la definición de variedad en vez de considerar cartas  $(U, \phi)$  con  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se toman con  $\phi : U \rightarrow (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  y las mismas propiedades.

Los abiertos de  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  con la topología relativa no son simplemente abiertos en  $\mathbb{R}^n$ , por ello el concepto de variedad con borde es más general que el de variedad.

**Definición:** Sea  $M$  una variedad con borde  $n$ -dimensional. Se llama *borde* de  $M$ , y se suele denotar con  $\partial M$ , al conjunto de puntos  $p \in M$  tales que existe una carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  (en el sentido anterior) con  $\phi(p) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ .

Nota: No puede ser que  $\phi(p) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  para cierta carta y  $\tilde{\phi}(p) \notin \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  para otra porque entonces  $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$  transformaría un entorno abierto en  $\mathbb{R}^n$  de  $\phi(p)$  en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que no es abierto, y eso está prohibido por la Topología de segundo para funciones continuas en  $\mathbb{R}^n$ . La notación  $\partial M$  que a primera vista es ya una exageración del uso de símbolos relacionados con la  $d$  de derivar, queda justificada con el enunciado del teorema de Stokes (y mucho más con el de de Rham, que no veremos este curso) porque esta  $\partial$  resulta una especie de dual de la  $d$  aplicada a formas diferenciales.

Dos propiedades que se siguen fácilmente a partir de estas definiciones son:

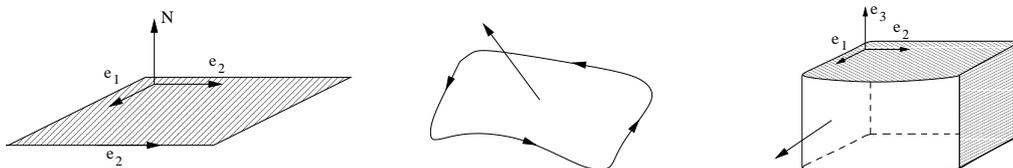
1. Una variedad es una variedad con borde tal que  $\partial M = \emptyset$ .
2. Si  $M$  es una variedad con borde, usando restricciones de las cartas,  $M - \partial M$  y  $\partial M$  tienen estructura de variedad de dimensión  $n$  y  $n - 1$ , respectivamente (porque  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  y  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  lo es a  $\mathbb{R}^{n-1}$ ).

La orientación de una variedad con borde para dimensión mayor que 1 tiene definiciones y propiedades análogas a las de una variedad usual.

Cada carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  con  $\mathcal{U} \cap \partial M \neq \emptyset$  de un atlas orientado  $\mathcal{A}$  de  $M$  se puede restringir para obtener una carta de  $\partial M$ . De este modo a partir de  $\mathcal{A}$  se obtiene un atlas orientado<sup>5</sup> en  $\partial M$ .

**Definición:** Sea  $M$  una variedad con borde orientada  $n$ -dimensional,  $n > 1$ . Se llama *orientación inducida* de  $\partial M$  a la que adquiere al restringir las cartas de un atlas orientado en  $M$ .

Si se considera  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$  metido en  $\mathbb{R}^3$  a altura  $z = 0$ , con la carta proyección la representación geométrica de la orientación en el interior es la normal hacia arriba y en el borde, el sentido ascendente del eje  $OY$ .



<sup>5</sup>El lector atento exigirá una justificación de este punto: Nótese que si  $(\mathcal{U}_1, \phi_1), (\mathcal{U}_2, \phi_2) \in \mathcal{A}$  con  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \partial M \neq \emptyset$  entonces el cambio de carta  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = (f^1, f^2, \dots, f^n)$  aplica puntos de  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  en puntos de  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Esto significa que en ellos  $f^1 = 0$  y  $J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = D_1 f^1 \cdot J(f^2, \dots, f^n)$ . Como  $f^1$  aplica un subconjunto de  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  en  $(-\infty, 0]$ , no puede ser que  $D_1 f^1(0, y^2, \dots, y^n) < 0$  porque en este caso  $f^1(t, y^2, \dots, y^n)$  sería decreciente y cuando  $t \rightarrow 0^-$  los puntos de  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  no se aplicarían en 0. En definitiva,  $J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) > 0$  implica que el jacobiano cuando las cartas se restringen al borde,  $J(f^2, \dots, f^n)$ , es también positivo.

Cada superficie en  $\mathbb{R}^3$  es localmente similar a este caso y se obtiene la bien conocida regla mnemotécnica de que la orientación inducida es aquella que al pasear por el borde con la cabeza en la dirección de la normal deja la superficie a la izquierda. Esto es una variante de la regla de la mano derecha o la *regla del sacacorchos*. En el caso de  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^2$  incluido en  $\mathbb{R}^3$ , con un razonamiento similar, se tiene que si consideramos la carta trivial la orientación inducida en el borde viene dada por la normal exterior.

El caso unidimensional es especial porque en el borde aparecerían variedades cero dimensionales que corresponden a puntos, y para ellos la definición de orientación no tiene sentido.

Si  $M$  es unidimensional,  $M - \partial M$  es siempre orientable y por convenio diremos que  $p \in \partial M$  tiene orientación  $+1$  si existe una carta  $(\mathcal{U}(p), \phi)$  con la misma orientación que las del atlas orientado elegido y que tiene orientación  $-1$  en caso contrario. Geométricamente en  $\mathbb{R}^n$ ,  $M$  es una curva y una orientación indica un sentido en el que se recorre, en cada porción conexa el punto de partida tiene orientación  $+1$  y el de llegada  $-1$ .



En la demostración del teorema de Stokes no consideraremos el caso de dimensión 1 pero se puede obtener respetando el convenio de que la integral sobre un punto es el valor de la función (forma de  $\Omega^0$ ) en dicho punto multiplicado por la orientación.

Un último convenio, bastante natural, antes de dar el enunciado es que sobreentendemos que la integral sobre el conjunto vacío es nula.

**Teorema 2.1.2 (Teorema de Stokes)** *Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional orientable con borde y  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  con soporte compacto, entonces*

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega$$

donde  $i : \partial M \rightarrow M$  es la inclusión y  $\partial M$  tiene la orientación inducida por la de  $M$ .

*Demostración:* Hagamos primero unas simplificaciones técnicas. Dada una partición de la unidad  $\{\psi_\alpha\}$  subordinada a un recubrimiento de  $M$ , sea  $\omega_\alpha = \psi_\alpha \omega$ , entonces claramente

$$\sum_{\alpha} \int_{\partial M} i^* \omega_{\alpha} = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

Por otra parte, la Proposición 1.4.3 y  $\sum_{\alpha} d\psi_{\alpha} = d1 = 0$  aseguran

$$\sum_{\alpha} \int_M d\omega_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int_M d\psi_{\alpha} \wedge \omega + \sum_{\alpha} \int_M \psi_{\alpha} d\omega = \int_M d\omega.$$

Entonces basta hacer la demostración cuando  $\omega$  tiene su soporte dentro del abierto de una sola carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ . Además por el Corolario 1.4.2 podemos también suponer que

$$\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n$$

donde  $\widehat{dx^j}$  significa que ese término se omite.

Por definición

$$d\omega = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

De acuerdo con (2.3) la integral  $\int_M d\omega$  es

$$\int_{\phi(\mathcal{U})} (\phi^{-1})^* d\omega = (-1)^{j-1} \int_{\phi(\mathcal{U})} D_j g$$

donde  $D_j g$  significa la  $j$ -ésima derivada parcial de la función  $g = f \circ \phi^{-1}$ . Por supuesto como el soporte de  $g$  está en  $\phi(\mathcal{U})$ , podemos extenderla sin problemas a  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$  como cero. El teorema fundamental del cálculo prueba

$$\int_M d\omega = 0 \quad \text{si } j \neq 1 \quad \text{y} \quad \int_M d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(0, t_2, \dots, t_n) dt_2 \dots dt_n \quad \text{si } j = 1.$$

Por otro lado

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_{\mathcal{V}} (\tilde{\phi}^{-1})^* i^* \omega$$

donde  $\mathcal{V} = \phi(\mathcal{U}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$  y  $\tilde{\phi}$  es la restricción de  $\phi$  al borde. Nótese que  $(\phi^{-1}(\mathcal{V}), \tilde{\phi})$  es una carta de  $\partial M$  con  $\phi^{-1}(\mathcal{V})$  conteniendo al soporte de  $i^* \omega$  y se puede reemplazar  $\mathcal{V}$  por  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Como  $x^i \circ \tilde{\phi}^{-1}$  es la identidad,  $x^1 \circ \tilde{\phi}^{-1} = 0$  en  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  y obtenemos cero a no ser que el término con  $j = 1$  no aparezca. Por tanto

$$\int_{\partial M} i^* \omega = 0 \quad \text{si } j \neq 1 \quad \text{y} \quad \int_{\partial M} i^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(0, t_2, \dots, t_n) dt_2 \dots dt_n \quad \text{si } j = 1,$$

lo cual completa la prueba.  $\square$

Como primeras consecuencias veamos que los tres teoremas clásicos sobre integrales vectoriales se pueden obtener sin esfuerzo. Contraviniendo la política seguida hasta ahora, se indica la regularidad suficiente para aplicarlos. En estos teoremas cuando hablamos de una superficie con borde nos referimos a una subvariedad bidimensional de  $\mathbb{R}^3$  con borde; de la misma forma una región con borde en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  denota una subvariedad con borde de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  con dimensión máxima.

**Corolario 2.1.3** (Teorema de Green) Sea  $D$  una región acotada en  $\mathbb{R}^2$  con borde, entonces para todo campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{F} = (P, Q) \in C^1$ , se cumple

$$\int_{\partial D} \vec{F} = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

donde se considera en  $\partial D$  la orientación inducida por la de  $D$ .

*Demostración:* Tómesese  $\omega = P dx + Q dy$  en el Teorema 2.1.2.  $\square$

**Corolario 2.1.4** (Teorema de Stokes) Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con borde, entonces para todo campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{F} \in C^1$  en  $S$ , se cumple

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_S \text{rot } \vec{F}$$

donde se considera en  $\partial S$  la orientación inducida por la de  $S$ .

*Demostración:* Tómesese  $\omega = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$  en el Teorema 2.1.2.  $\square$

**Corolario 2.1.5** (Teorema de la divergencia de Gauss) Sea  $V$  una región acotada en  $\mathbb{R}^3$  con borde, entonces para todo campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{F} \in C^1$  en  $V$ , se cumple

$$\int_{\partial V} \vec{F} = \int_V \text{div } \vec{F}$$

donde se considera en  $\partial V$  la orientación inducida por la de  $V$ .

*Demostración:* Tómesese  $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dy + F^3 dx \wedge dy$  en el Teorema 2.1.2.  $\square$

Una sorprendente consecuencia permite calcular el área de una región en  $\mathbb{R}^2$  conociendo su borde.

**Corolario 2.1.6** Sean  $D$  y  $\partial D$  como en el teorema de Green, entonces el área de  $D$  es

$$A(D) = \int_{\partial D} \vec{F} \quad \text{con} \quad \vec{F}(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x).$$

*Demostración:* Se sigue directamente del teorema de Green.  $\square$

Ejemplo: Comprobar que si  $r = f(\theta)$  con  $f \in C^1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , define una curva cerrada en polares ( $f(0) = f(2\pi)$ ), entonces el área de la región limitada por ella es

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta.$$

Basta usar la parametrización  $\sigma(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$ , en el Corolario 2.1.6 para obtener

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-f(\theta) \sin \theta, f(\theta) \cos \theta) \cdot (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta) d\theta,$$

y después de operar se obtiene la fórmula pedida.

**Ejemplo:** Imaginemos un pequeño cuadradito de área  $A$  paralelo a la superficie de un líquido y situado a una profundidad  $h$ . El peso del líquido encima de él será  $mg = Ah\rho g$  con  $\rho$  la densidad (masa = volumen  $\cdot$  densidad). Si pudiéramos quitar repentinamente toda esa columna de agua, por acción y reacción la que está debajo saltaría hacia arriba con una fuerza  $Ahg$ . Es decir, a profundidad  $h = -z$  hay una fuerza por unidad de superficie (una “presión vectorial”) dada por  $\vec{P} = (0, 0, \rho z g)$ . Si sumergimos totalmente un patito de goma o a Arquímedes,  $A$ , en el baño, sufrirá un empuje hacia arriba igual a la “suma” de todas estas fuerzas a lo largo de la superficie de contacto,  $S = \partial A$ . En términos matemáticos, definamos el *empuje* como  $\int_S \vec{P}$ . Por el teorema de la divergencia esto es  $\rho g \int_A 1 = \rho g \text{Vol}(A) = g \text{Masa}(A)$ . En definitiva, un cuerpo sumergido en un líquido sufre un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen del líquido que desaloja: el *Principio de Arquímedes*.

## Ejercicios de la sección 1

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

- i) Si  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ¿cuánto vale  $f^*(dx \wedge dy)$ ?
- ii) Si  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow L$ , ¿cuándo tiene sentido  $g^* \circ f^*$ ?
- iii) ¿Es cierto que  $d(f^*\omega \wedge d(f^*\eta)) = d(d(f^*\omega) \wedge f^*\eta)$  para  $\omega, \eta \in \Omega^2(M)$ ?
- iv) ¿Por qué una variedad es una variedad con borde?
- v) ¿Por qué  $\partial(\partial M) = \emptyset$ ?
- vi) Si  $\partial M$  es orientable, ¿debe serlo  $M$ ?

2) Comprobar la relación  $f^*d\omega = d(f^*\omega)$  cuando  $f$  es el cambio de polares a rectangulares  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  y  $\omega = y dx + xy dy$ .

3) En  $S^1$  consideramos las cartas  $(S^1 - \{(0, 1)\}, \phi_1)$  y  $(S^1 - \{(0, -1)\}, \phi_2)$  dadas por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur, respectivamente. Probar que ambas cartas no tienen la misma orientación. Efectuar alguna modificación leve de alguna de ellas para que sí conformen un atlas orientado.

4) Sea  $C$  la curva cerrada en  $\mathbb{R}^2$  que viene parametrizada en coordenadas polares como  $r = f(\theta)$  donde  $f$  es  $2\pi$ -periódica y  $\theta \in [0, 2\pi]$  (se supone la orientación compatible con esta parametrización). Calcular  $\int_C i^*\omega$  donde  $\omega = (-y dx + x dy)/(x^2 + y^2)$ .

5) Sea  $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ . Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie e  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la inclusión, comprobar que la fórmula para  $\int_S i^*\omega$  coincide con la estudiada en cursos anteriores para integrar el campo vectorial  $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$  sobre  $S$ ,  $\int_S \vec{F}$ .

6) Sea  $\mathcal{U} \subset S^2$ , donde  $S^2$  es la superficie esférica unidad en  $\mathbb{R}^3$ . Explicar por qué  $A(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} i^*\omega$  con  $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$  es una definición natural para el área de  $\mathcal{U}$ . Calcular  $A(S^2)$ . *Indicación:* Utilícese la fórmula para calcular integrales de superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

7) Comprobar el teorema de Stokes cuando  $\omega = j^*(z dx + x dy + y dz)$  y  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ , donde  $j : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la inclusión.

8) Hallar el área limitada por la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  usando el teorema de Green. Dar también un argumento geométrico sencillo para deducirla a partir del área del círculo.

9) Sea  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}/\|\vec{x}\|^3$  para  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ .

a) Calcular  $\int_{S^2} \vec{F}$  donde en  $S^2$ , la esfera unidad, se supone la orientación correspondiente a la normal exterior. ¿Por qué la integral no se anula si  $\text{div } \vec{F} = 0$ ?

b) Sea  $M = \{a \leq \|\vec{x}\| \leq b\}$ ,  $0 < a < b$ . Calcular  $\int_{\partial M} \vec{F}$ .

c) Calcular  $\int_S \vec{F}$  para cualquier superficie esférica en  $\mathbb{R}^3$  con  $\{\vec{0}\} \notin S$ .

10) Sea  $\omega = (z + 2xyze^{x^2}) dx + (ze^{x^2} + 2ye^{y^2}) dy + ye^{x^2} dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ . Calcular su integral a lo largo de la curva definida por la intersección del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y la superficie esférica unidad.

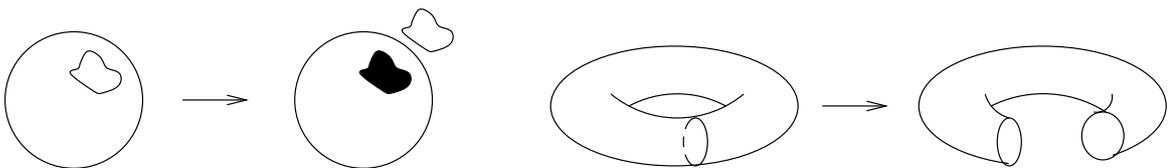
## 2.2. Cohomología de de Rham

En la Topología de segundo se estudiaban ampliamente dos propiedades que se conservaban por aplicaciones continuas: la conexión y la compacidad. Esta última propiedad, a pesar de tener una definición y un significado más complejo, en  $\mathbb{R}^n$  es equivalente a ser cerrado y acotado, gracias al teorema de Heine-Borel. La conexión intuitivamente es la propiedad de “ser de una pieza” y resultaba útil en los ejercicios de aquel curso para probar que no eran homeomorfos algunos subespacios de  $\mathbb{R}^n$  (por supuesto con la topología usual).



Por ejemplo, un aspa y el borde de un cuadrado no son homeomorfos porque si quitamos el punto central del aspa se desconecta en cuatro trozos, mientras que cualquiera que fuera la imagen de ese punto en el borde del cuadrado, al omitirla no lo desconectaría.

En cierto modo, la conexión es infalible cuando tratamos de distinguir objetos de dimensión uno pero es poco poderosa en dimensiones mayores. ¿Por qué son topológicamente diferentes la esfera  $S^2$  y el toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ ? A la luz del ejemplo anterior parece natural tratar de quitar una curva cerrada en lugar de un punto (si no nos salimos del ambiente estrictamente topológico, esto causa un sinnúmero de problemas, como la existencia de curvas de Peano) y nos percatamos de que  $S^2$  se desconecta mientras que en el toro hay curvas cerradas que no desconectan.



Éste es el *orden de conexión* introducido por E. Betti en tiempos tan lejanos como 1871. Más tarde, acabando el siglo XIX, H. Poincaré puso en rigor esta idea y por medio de estructuras combinatorias asoció grupos a las variedades, los grupos de homología, que fueron evolucionando y distanciándose de su origen combinatorio a lo largo de las primeras décadas del siglo XX. Algunos resultados, por ejemplo los de J.W. Alexander y G. de Rham, mostraron que los duales de estos grupos podrían ser más naturales y surgieron los grupos de cohomología.

En esta sección trataremos la cohomología de de Rham, la cual está asociada a formas diferenciales en variedades. Un estudio más general de las teorías homológicas y cohomológicas ha desaparecido completamente de la licenciatura desde hace años, e incluso puede que del tercer ciclo. El lector interesado puede consultar por ejemplo [Gr-Ha] quizá después de leer [Ko] a modo de introducción.

Para dar una idea del tipo de técnicas que vamos a usar, consideremos  $\eta = j^*\omega$  donde  $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la inclusión y

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Un cálculo prueba que  $\int_{S^1} \eta = 2\pi$ , con la orientación habitual, lo cual impide que exista  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $df = \eta$ , en este caso la integral sería nula por el teorema de Stokes aplicado a  $F$  ya que  $\partial S^1 = \emptyset$ . Sin embargo para cualquier forma  $g dx \in \Omega^1(\mathbb{R})$  se tiene  $g dx = d(\int_0^x g)$ . La conclusión es que  $S^1$  y  $\mathbb{R}$  no son lo mismo (no son difeomorfos). El resultado es muy barato, se podría haber deducido simplemente de la compacidad, lo notable es que hayamos podido emplear formas diferenciales y el teorema de Stokes.

Para generalizar esta idea distinguimos las formas diferenciables “integrables” de las que no lo son, notando además que la “integrabilidad” implica que la derivada exterior sea cero, por la propiedad  $d(d\omega) = 0$ .

**Definición:** Se dice que  $\omega \in \Omega^k(M)$  es una *forma diferencial cerrada* si  $d\omega = 0$  y se dice que es una *forma diferencial exacta* si existe  $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ ,  $k \geq 1$ , tal que  $\omega = d\eta$ .

La diferencia entre formas cerradas y exactas es la base para definir los grupos de cohomología.

**Definición:** Sea  $M$  una variedad, para cada entero no negativo  $k$  se llama *k-ésimo grupo de cohomología de de Rham* al espacio vectorial cociente

$$H^k(M) = \{k\text{-formas cerradas}\} / \{k\text{-formas exactas}\}.$$

Nota: Equivalentemente,  $H^k(M)$  es el cociente del núcleo de  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  entre la imagen de  $d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ . Sobreentendemos que  $\Omega^{-1}(M) = \{0\}$  y por

tanto para  $k = 0$  la imagen, las 0-formas exactas, son el espacio trivial  $\{0\}$ . A pesar de que  $H^k(M)$  hereda la estructura de espacio vectorial de  $\Omega^k(M)$ , se habla normalmente de “grupos de cohomología” porque en el ámbito general de la cohomología [Gr-Ha] (no tratado aquí) sólo se tiene una estructura de grupo. Cada elemento de  $H^k(M)$  es una clase de equivalencia de formas diferenciales que representaremos como  $[\omega]$  con  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Para las variedades que nos son más familiares (esferas, toros, etc.) se cumple  $\dim H^k(M) < \infty$ , en este caso se dice que  $M$  es de *tipo finito* y que  $\dim H^k(M)$  es el  $k$ -ésimo número de Betti.

Podemos reescribir el ejemplo diciendo que  $H^1(\mathbb{R})$  es el grupo trivial y  $H^1(S^1)$  no lo es. En el resto de la sección desarrollaremos un método para calcular en muchos casos los grupos de cohomología, en particular los de  $\mathbb{R}^n$  y  $S^n$ . Antes de ello nos ocuparemos de la relación con propiedades topológicas. Un primer resultado se sigue directamente a partir de la definición.

**Lema 2.2.1** *Si  $M$  es conexa  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$  y si  $M$  tiene un número finito  $K$  de componentes conexas  $M_1, M_2, \dots, M_K$ , se cumple*

$$H^k(M) \cong H^k(M_1) \oplus H^k(M_2) \oplus \dots \oplus H^k(M_K).$$

*En particular  $H^0(M) \cong \mathbb{R}^K$ .*

*Demostración:* La fórmula  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$  para  $M$  conexa se sigue de que una función con derivada cero en un abierto conexo debe ser constante.

Por otro lado cada  $\omega \in \Omega^k(M)$  se escribe de forma única como  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_K$  donde  $\omega_j$  se anula fuera de  $M_j$  (basta definir  $\omega_j = \omega$  en  $M_j$  y cero en el resto). Es fácil ver que esta descomposición da lugar al isomorfismo.  $\square$

Introduzcamos o recordemos el concepto de homotopía de aplicaciones y de variedades. Para este minicurso rápido de cohomología casi es más relevante la idea visual que los detalles, sobre todo para los que no hayan estudiado el grupo fundamental en la Topología de segundo.

**Definición:** Sean  $f, g : M \rightarrow N$ . Se dice que  $f$  y  $g$  son *homótopas* (de manera  $C^\infty$ ) si existe una función  $C^\infty$  llamada *homotopía*,  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ , tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ .

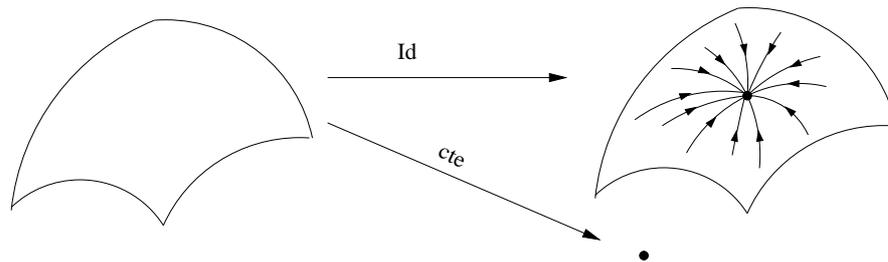
Nota: La función  $H$  se podría extender a  $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$  utilizando argumentos básicos de análisis. En algunas demostraciones utilizaremos la versión extendida.

Para los que hayan estudiado el grupo fundamental en segundo, allí se consideró el caso el que  $M = S^1$ ,  $N = \mathbb{R}^2$  y la idea geométrica correspondiente es que una homotopía establece una manera de deformar un lazo (una curva cerrada parametrizada) en otro.

Para poder definir el grupo fundamental se exigía que uno de los puntos quedase fijo en toda la transformación, el llamado punto base, pero con vistas a la cohomología nada similar será necesario.

Las dos definiciones siguientes son una especie de homotopía de variedades.

**Definición:** Se dice que una variedad es *contractible* o *contractible a un punto* si la identidad en ella es homótopa a una aplicación constante.



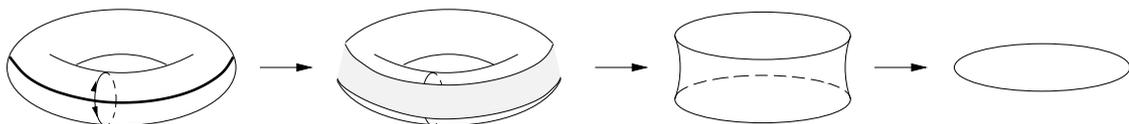
La siguiente definición generaliza a la anterior cuando un punto se cambia por una variedad.

**Definición:** Se dice que dos variedades  $M$  y  $N$  son *homótopas* o que son del mismo *tipo de homotopía*, si existen dos funciones  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow M$  tales que  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son funciones homótopas a las identidades en  $N$  y  $M$ .

Más allá de la definición, es útil saber que geoméricamente si podemos meter  $M$  dentro de  $N$  y “aplastar”  $N$  a  $M$ , tendremos que  $M$  y  $N$  serán homótopas (se dice que  $M$  es un *retracto* de  $N$ ).

Ejemplo: La variedad  $M = \mathbb{T} - C_1$  donde  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$  es un toro y  $C_1$  es su ecuador (círculo máximo) es homótopa a  $S^1$ .

Identifiquemos  $S^1$  con la circunferencia interior  $C_2$  de  $M$ . Consideremos la inclusión  $f : S^1 \rightarrow M$  y la función  $g : M \rightarrow S^1$  que a cada punto de  $M$  le asigna el punto de  $C_2$  (esto es, de  $S^1$ ) en su mismo meridiano. Está claro que  $g \circ f$  es la identidad y por otra parte la identidad en  $M$  es homótopa a  $f \circ g$  porque podemos ir moviendo cada punto  $p \in M$  a lo largo de un meridiano para que se acerque a  $g(p)$ .



¿Por qué estos conceptos son relevantes? Pues gracias a algunos resultados, cuya prueba pospondremos, que ligan las homotopías con los grupos de cohomología y los *pullbacks*.

Una función  $f : M \rightarrow N$  induce  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  que es una aplicación lineal que conmuta con la derivada exterior (Lema 2.1.1), por consiguiente  $f^*$  actúa también como una aplicación lineal  $H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ . Para no sobrecargar la notación, seguiremos escribiendo  $f^*$  para indicar la acción del *pullback* sobre los grupos de cohomología.

**Proposición 2.2.2** Sean  $M$  y  $N$  variedades,

a) Si  $f, g : M \rightarrow N$  son funciones homótopas entonces  $f^*$  y  $g^*$  son idénticas actuando sobre los grupos de cohomología.

b) Si  $M$  y  $N$  son homótopas entonces sus grupos de cohomología son isomorfos.

En palabras, este resultado nos dice que la acción del *pullback* es invariante por homotopías y que  $H^k(M)$  no cambia al pasar de  $M$  a otra variedad homótopa. Esto es sorprendente teniendo en cuenta la definición de la cohomología de de Rham en términos de formas diferenciales. Podemos leer topología diferencial en unos espacios vectoriales de dimensión finita, lo que hace falta ahora es que seamos capaces de hallarlos.

Con amplitud de miras un punto puede verse como una variedad 0-dimensional. Su espacio tangente es trivial (0-dimensional) y por tanto las  $k$ -formas,  $k \geq 1$ , son todas nulas, en particular  $H^k(\{p\}) \cong \{0\}$ . Entonces el apartado b) de la proposición anterior para  $N = \{p\}$  da lugar a la siguiente consecuencia con nombre propio:

**Corolario 2.2.3 (Lema de Poincaré)** Sea  $M$  es una variedad contractible, entonces  $H^k(M) \cong \{0\}$  para  $k \geq 1$ .

Nótese que una variedad contractible en particular es conexa por arcos, por tanto  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$ .

Con ello deducimos nuestros primeros grupos de cohomología.

Ejemplo: Se cumple  $H^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$  y  $H^k(\mathbb{R}^n) \cong \{0\}$  si  $k \geq 1$ .

Evidentemente  $H^k(M) \cong \{0\}$  si  $k$  es mayor que la dimensión de  $M$ . En variedades orientables compactas se puede ir un poco más allá de esta trivialidad y tratar el caso en que  $k$  coincide con la dimensión. La demostración dada aquí es una simplificación de la incluida en [Ga-Ru], no es de especial relevancia y puede omitirse.

**Teorema 2.2.4** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional orientable, compacta y conexa. Para  $\omega \in \Omega^n(M)$  la aplicación

$$[\omega] \mapsto \int_M \omega$$

establece un isomorfismo entre  $H^n(M)$  y  $\mathbb{R}$ .

*Demostración:* Nótese en primer lugar que la aplicación está bien definida porque  $\int_M \omega = \int_M (\omega + d\eta)$  gracias al Teorema de Stokes ( $\partial M = \emptyset$ ).

Sea  $\omega_0$  una forma arbitraria que tiene soporte contenido en el abierto de una carta  $(\mathcal{U}_0, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  y cumple  $\int_M \omega_0 = 1$  (es fácil asegurar su existencia pasando el problema a  $\mathbb{R}^n$ ). Vamos a probar que para cualquier  $\eta \in \Omega^n(M)$  se cumple que  $\eta - \omega_0 \int_M \eta$  es exacta, de ello se deduce que el núcleo de la aplicación es trivial ( $\int_M \eta = 0$  implica  $[\eta] = 0$ ) y por tanto el resultado (la sobreyectividad es clara,  $[\lambda\omega_0] \mapsto \lambda$ ).

Para probar que  $\eta - \omega_0 \int_M \eta$  es exacta, empleando particiones de la unidad es suficiente considerar el caso en que  $\eta$  tiene su soporte compacto incluido en el abierto  $\mathcal{V}$  de una carta. De hecho podemos suponer que ésta es  $(\mathcal{U}_0, \phi)$  porque siempre se puede tomar una cadena finita de abiertos  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k = \mathcal{V}$  con  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1} \neq \emptyset$  (recuérdese que  $M$  es compacta y conexa) y escribir

$$\eta - \omega_0 \int_M \eta = (\eta - \omega_k \int_M \eta) + \sum_{i=1}^k (\omega_i - \omega_{i-1}) \int_M \eta$$

donde  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  son como  $\omega_0$ , con  $\int_M \omega_i = 1$ , pero con soporte en  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i-1}$ . Si sabemos probar el resultado en cada carta, cada uno de los términos entre paréntesis, que son  $\omega_i - \omega_{i-1} \int_M \omega_i$ , representa una forma exacta.

Escribiendo  $\omega = \eta - \omega_0 \int_M \eta$ , todo se reduce a demostrar que si  $\omega \in \Omega^n(M)$  tiene soporte contenido en  $\mathcal{U}_0$  y verifica  $\int_M \omega = 0$  entonces es exacta. En coordenadas  $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  y lo que necesitamos es el siguiente resultado de análisis: Si  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con  $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$  entonces existen  $g_1, g_2, \dots, g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tales que  $f = \sum_{i=1}^n \partial_i g_i$ .

Procedemos por inducción. Si  $n = 1$  basta tomar  $g_1(x^1) = \int_{-\infty}^{x^1} f(t) dt$ . Aplicando la hipótesis de inducción a  $\tilde{f}(x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) - \phi(x^1, \dots, x^n) \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, x^{n+1})$  donde  $x^{n+1}$  está fijado y  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con  $\int \phi = 1$ , se obtienen  $g_1, g_2, \dots, g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  tales que  $\sum_{i=1}^n \partial_i g_i = \tilde{f}$ . Definiendo  $g_{n+1} = \phi(x^1, \dots, x^n) \int_{-\infty}^{x^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{u}, t) d\vec{u} dt$  se cumple  $\sum_{i=1}^{n+1} \partial_i g_i = f$ , además  $g_{n+1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  porque  $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f = 0$ .  $\square$

Ejemplo: Para  $S^1$  se cumple  $H^0(S^1) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$  y  $H^k(S^1) \cong \{0\}$  si  $k > 1$ . Habíamos visto que  $\int_{S^1} i^* \omega \neq 0$  con  $\omega = (-ydx + xdy)/(x^2 + y^2)$ , por tanto  $[i^* \omega]$  es un generador de  $H^1(S^1)$  según el teorema anterior. De la misma forma se cumple  $\int_{S^n} i^* \omega \neq 0$  cuando

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$$

(la integral da el “área” de  $S^n$ ) y entonces  $[i^* \omega]$  genera  $H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$ .

Ejemplo:  $H^n(\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}) \cong \mathbb{R}$ . No se puede aplicar directamente el teorema a  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  porque no es compacto pero  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  y  $S^n$  tienen el mismo tipo de homotopía porque

podemos aplastar  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  en  $S^n$  con  $f(\vec{x}) = \vec{x}/\|\vec{x}\|$  e incluir  $S^n$  en  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  con  $g(\vec{x}) = \vec{x}$ , la composición  $g \circ f$  es homótopa a la identidad en  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  por medio de  $F(\vec{x}, t) = t\vec{x} + (1-t)\vec{x}/\|\vec{x}\|$ . Por la Proposición 2.2.2,  $H^n(\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}) \cong H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$ . Recuérdese que  $H^n(\mathbb{R}^n) \cong \{0\}$  entonces se deduce que  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  no son difeomorfos, un resultado que había escapado a los métodos de cursos anteriores. Todavía más, aunque no lo probaremos aquí,  $H^k(M)$  sólo depende de la topología de  $M$  y de ello se deduce que  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  no son homeomorfos.

Los resultados anteriores distan mucho de ser generales. Lo que nos gustaría es un método para calcular la cohomología cuando se construye una variedad pegando trozos (no disjuntos). La buena noticia es que tal método existe, incluso se puede dar un tinte combinatorio a la computación de modo que fórmulas como la archiconocida de Euler  $V + C = A + 2$  y sus generalizaciones revelen su naturaleza cohomológica [GoG]. El gran triunfo de la cohomología frente a los grupos de homotopía de orden superior<sup>6</sup> es justamente esta posibilidad de hacer cálculos. La mala noticia es que una versión completa y justificada de los cálculos cohomológicos podría ser el contenido de todo un curso y necesita unos prerrequisitos que aquí sólo podemos esbozar de forma fragmentaria. Uno de los principales elementos del lenguaje está recogido en la siguiente definición.

**Definición:** Se dice que una colección finita de grupos abelianos  $A_j$  y de homomorfismos  $f_j : A_j \rightarrow A_{j+1}$  determinan una *sucesión exacta*, y se suele representar con

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1},$$

si  $\text{Im } f_j = \text{Ker } f_{j+1}$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ .

En nuestro caso los grupos que consideraremos serán de hecho espacios vectoriales pero, como ya hemos mencionado, en otras cohomologías no está garantizada esta estructura adicional. Típicamente  $A_0$  y  $A_n$  son los grupos triviales, que denotaremos simbólicamente por 0, y por tanto  $f_0$  y  $f_n$  son los homomorfismos triviales.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \rightarrow 0$$

se suele llamar *sucesión exacta corta*. Nótese que  $f_1$  debe ser inyectiva y  $f_2$  sobreyectiva con lo cual  $A_3 = \text{Im } f_2$  y  $A_1 \cong \text{Ker } f_2$  (porque  $\text{Im } f_1 = \text{Ker } f_2$ ). Centrándonos en el caso de espacios vectoriales las sucesiones exactas limitan las posibilidades para las dimensiones.

---

<sup>6</sup>En la Topología de segundo se logró un éxito parcial al distinguir algunos objetos de dimensión dos por medio del grupo fundamental formado por clases de lazos. Tal grupo se generaliza tomando "laços"  $k$  dimensionales pero los avances en este terreno han sido poco alentadores. Ni siquiera se han conseguido calcular completamente los grupos generalizados de todas las esferas  $S^n$ .

**Lema 2.2.5** Si  $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta de espacios vectoriales de dimensión finita entonces  $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$ .

Nota: Aunque el resultado está sólo enunciado para dimensión finita, un vistazo a la demostración indica que se extiende al caso general cuando la aritmética del infinito no conduce a indeterminaciones. Por ejemplo no es posible  $\dim V_2 = \dim V_4 = \infty$  y el resto de los  $V_j$  de dimensión finita.

*Demostración:* Para  $n = 1$  y  $n = 2$  es trivial, mientras que cuando  $n = 3$  se sigue del comentario anterior y la conocida relación entre las dimensiones del núcleo y la imagen (si  $f : V \longrightarrow W$ ,  $\dim W = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$ ). Para  $n > 3$  es fácil comprobar que la sucesión se puede descomponer en otras dos:

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \text{Im } f_2 \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \text{Im } f_2 \xrightarrow{i} V_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$$

con  $i$  la inclusión. El resultado se sigue por inducción.  $\square$

Con estas definiciones de urgencia al menos entenderemos el enunciado del siguiente resultado fundamental. La descripción de las aplicaciones  $r$ ,  $s$  y  $\delta$  está incluida en el esquema de la demostración.

**Teorema 2.2.6 (Sucesión de Mayer-Vietoris)** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  dos abiertos tales que  $M = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(M) \xrightarrow{r} H^0(\mathcal{U}) \oplus H^0(\mathcal{V}) \xrightarrow{s} H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{\delta} H^1(M) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow H^k(M) \xrightarrow{r} H^k(\mathcal{U}) \oplus H^k(\mathcal{V}) \xrightarrow{s} H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow H^n(M) \xrightarrow{r} H^n(\mathcal{U}) \oplus H^n(\mathcal{V}) \xrightarrow{s} H^n(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

es una sucesión exacta.

Nota: Por convenio diremos que los grupos de cohomología del vacío son todos triviales, así en el caso  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$  recuperamos el resultado  $H^k(M) \cong H^k(\mathcal{U}) \oplus H^k(\mathcal{V})$  que se deriva del Lema 2.2.1.

*Demostración (esquema):* Sean  $i_1 : \mathcal{U} \longrightarrow M$ ,  $i_2 : \mathcal{V} \longrightarrow M$ ,  $i_3 : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ ,  $i_4 : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$  las inclusiones. Definimos  $r : H^k(M) \longrightarrow H^k(\mathcal{U}) \oplus H^k(\mathcal{V})$  como  $r([\omega]) = (i_1^*([\omega]), i_2^*([\omega]))$  y  $s : H^k(\mathcal{U}) \oplus H^k(\mathcal{V}) \longrightarrow H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  como  $s([\omega_1], [\omega_2]) = i_4^*([\omega_2]) - i_3^*([\omega_1])$ . Estas definiciones también se pueden extender a los espacios respectivos de formas diferenciales (sin tomar cocientes) y con un poco de trabajo se prueba la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{r} \Omega^k(\mathcal{U}) \oplus \Omega^k(\mathcal{V}) \xrightarrow{s} \Omega^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow 0.$$

El llamado *homomorfismo de conexión*<sup>7</sup>  $\delta : H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^{k+1}(M)$  es más complicado de definir. Dada  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ , por la sucesión exacta anterior existe  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^k(\mathcal{U}) \oplus \Omega^k(\mathcal{V})$  tal que  $s(\omega_1, \omega_2) = \omega$ . Si hubiéramos partido de  $d\omega$  hubiéramos podido elegir  $(d\omega_1, d\omega_2)$ , entonces si  $\omega$  es cerrada,  $(d\omega_1, d\omega_2) \in \text{Ker } s$  y existe, de nuevo por la sucesión exacta,  $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$  tal que  $r(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$ . Con todo esto, se define  $\delta([\omega]) = [\eta]$ . Evidentemente no está nada claro que  $\delta$  quede bien definida. Para comprobarlo es necesario verificar que  $[\eta]$  no depende del representante de  $[\omega]$  escogido (es decir, es invariante si  $\omega \leftrightarrow \omega + d\alpha$ ) y que tampoco se ve afectado por la elección de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Ambas cosas se consiguen empleando que el *pullback* y la derivada exterior conmutan.

El punto crucial en la comprobación de que la sucesión de Mayer-Vietoris es exacta es  $\text{Im } s = \text{Ker } \delta$ .

Si  $\omega \in \text{Im } s$ , entonces  $\omega = i_4^*([\omega_2]) - i_3^*([\omega_1])$  con  $\omega_1$  y  $\omega_2$  cerradas ( $[\omega_1]$  y  $[\omega_2]$  son clases de cohomología). En la definición de  $\delta$  se tiene  $(d\omega_1, d\omega_2) = (0, 0)$  y como  $r(0) = (0, 0)$ ,  $\text{Im } s \subset \text{Ker } \delta$ .

Sea ahora  $\omega \in \text{Ker } \delta$ , entonces según la definición de  $\delta$  existe  $\eta$  exacta, digamos  $\eta = d\alpha$ , tal que  $r(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$  con  $s(\omega_1, \omega_2) = \omega$ . Cambiando  $(\omega_1, \omega_2)$  por  $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = (\omega_1, \omega_2) - r(\alpha)$  se tiene  $(d\tilde{\omega}_1, d\tilde{\omega}_2) = (0, 0)$  porque  $d(r(\alpha)) = r(d\alpha)$  y  $s(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = \omega$  porque  $\text{Ker } r = \text{Im } s$ . Así pues  $\omega \in \text{Im } s$  y se concluye  $\text{Im } s \supset \text{Ker } \delta$ .

La comprobación de la exactitud de la sucesión en otros puntos es más sencilla. Véanse los detalles en [GoG].  $\square$

Ejemplo: Vamos a calcular los grupos  $H^k(S^1)$  (que ya conocíamos) usando la sucesión de Mayer-Vietoris.

Tomemos por ejemplo  $\mathcal{U} = S^1 - \{(0, 1)\}$ ,  $\mathcal{V} = S^1 - \{(0, -1)\}$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}) \oplus H^0(\mathcal{V}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \\ \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}) \oplus H^1(\mathcal{V}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur,  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son difeomorfos a la recta real, que es contractible, y por tanto tienen grupos de cohomología triviales para  $k \geq 1$ , en particular  $H^1(\mathcal{U}) \cong H^1(\mathcal{V}) \cong \{0\}$  y la sucesión exacta anterior se puede reducir a:

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}) \oplus H^0(\mathcal{V}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0.$$

Contando componentes conexas,  $H^0(S^1) \cong H^0(\mathcal{U}) \cong H^0(\mathcal{V}) \cong \mathbb{R}$  y  $H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cong \mathbb{R}^2$ . El Lema 2.2.5 permite concluir<sup>8</sup> que  $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ , por supuesto  $H^k(S^1) \cong \{0\}$  para  $k \geq 2$ .

<sup>7</sup>En álgebra homológica hay un procedimiento mecánico, llamado *snake lemma*, para crear homomorfismos de conexión como éste que permiten pasar de una sucesión exacta corta a otra larga a cambio de tomar cocientes. La definición general de los grupos de homología y cohomología está basada en esta idea.

<sup>8</sup>Recuérdese una vez más que un espacio vectorial real está caracterizado por su dimensión siempre que sea finita. Es decir, el único espacio vectorial real de dimensión  $k$  es, salvo isomorfismos,  $\mathbb{R}^k$ .

Este resultado se puede generalizar inductivamente.

Ejemplo: Los grupos de cohomología de  $S^n$  son

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para probarlo, tomamos de nuevo  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  iguales a  $S^n$  menos los polos norte y sur, entonces  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  son difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ , respectivamente (por las proyecciones estereográficas) y el comienzo de la sucesión de Mayer-Vietoris es:

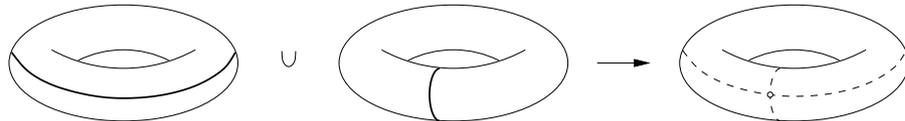
$$0 \longrightarrow H^0(S^n) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}) \oplus H^0(\mathcal{V}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0$$

que por el Lema 2.2.5 implica  $H^1(S^n) \cong \{0\}$ . Por otro lado, para  $k \geq 1$  en la sucesión de Mayer-Vietoris encontramos

$$0 \longrightarrow H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^{k+1}(S^n) \longrightarrow 0$$

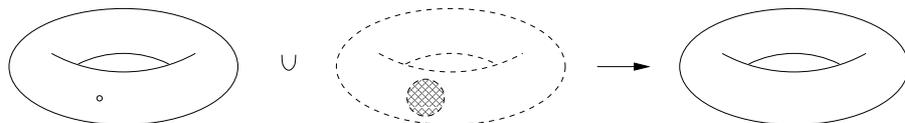
(porque  $H^k(\mathcal{U}) \cong H^k(\mathcal{V}) \cong \{0\}$ ). Además  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  y  $S^{n-1}$  son homótopos como habíamos visto, así pues  $H^{k+1}(S^n) \cong H^k(S^{n-1})$  para  $n > 1$ ,  $k \geq 1$ . Iterando esta fórmula todos los grupos de cohomología de  $S^n$  se relacionan con los de  $S^1$  y se obtiene el resultado indicado (ejercicio: escribir los detalles).

Ejemplo: Si  $M$  es el toro usual  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$  menos uno de sus puntos, se tiene  $M = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  donde  $\mathcal{U}$  es  $\mathbb{T}$  menos el ecuador (el círculo máximo) y  $\mathcal{V}$  es  $\mathbb{T}$  menos un meridiano (véase también el esquema en la p.44 de [GoJ]).



Basta tener una mínima visión tridimensional para darse cuenta de que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  es difeomorfo a un rectángulo, por tanto  $H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cong \{0\}$  para  $k \geq 1$ . Por otro lado,  $\mathcal{U}$  es homótopo a  $S^1$  (se ha visto en un ejemplo anterior) y lo mismo ocurre con  $\mathcal{V}$ , por tanto  $H^k(\mathcal{U}) \cong H^k(\mathcal{V}) \cong \mathbb{R}$  para  $k = 0, 1$  y los grupos son triviales en otro caso. Entonces  $H^1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow H^2(M) \rightarrow H^2(\mathcal{U}) \oplus H^2(\mathcal{V})$  en la sucesión de Mayer-Vietoris implica  $H^2(M) \cong \{0\}$  y los Lemas 2.2.1 y 2.2.4 implican  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$  y  $H^1(M) \cong \mathbb{R}^2$ .

Ejemplo: Aunque no es el método más económico para calcular  $H^k(\mathbb{T})$  se puede emplear el ejemplo anterior y la descomposición  $\mathbb{T} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  con  $\mathcal{U} = M$  y  $\mathcal{V}$  un parche difeomorfo a un disco tapando el agujero de  $M$



Nótese que  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  son difeomorfos a  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , respectivamente. Utilizando los resultados anteriores (en particular  $H^0(\mathbb{T}) \cong H^2(\mathbb{T}) \cong \mathbb{R}$ ) la sucesión de Mayer-Vietoris es, salvo isomorfismos,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

y por el Lema 2.2.5,  $H^1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{R}^2$ .

Vayamos ahora con algunas consecuencias topológicas de la teoría. Continuando con la política seguida hasta ahora, no se indica la regularidad. En principio deberíamos sobreenteder  $C^\infty$  sin embargo todos ellos siguen cumpliéndose para funciones continuas (esto está relacionado con que los grupos de cohomología sólo dependen de la topología de la variedad, pero no se prueba aquí).

**Proposición 2.2.7** *Sea  $B^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| \leq 1\}$ . No existe  $f : B^n \longrightarrow S^{n-1}$  que deje todos los puntos de la frontera fijos.*

*Demostración:* Suponemos  $n > 1$ , para  $n = 1$  el resultado es inmediato porque  $S^0$  no es conexo. Sea  $i : S^{n-1} \longrightarrow B^n$  la inclusión. Si existiera tal  $f$ ,  $f \circ i$  sería la identidad en  $S^{n-1}$  y por tanto  $i^* \circ f^*$  lo sería en  $H^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$ . Esto es imposible porque  $f^* : H^{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H^{n-1}(B^n) \cong \{0\}$  ya que  $B^n$  es contractible a un punto  $\square$

**Proposición 2.2.8 (Teorema del punto fijo de Brouwer)** *Si  $g : B^n \longrightarrow B^n$ , con  $B^n$  como antes, entonces  $g$  deja algún punto fijo.*

*Demostración:* Si  $\vec{x} \neq g(\vec{x})$  para todo  $\vec{x} \in B^n$  entonces sea  $f$  la función que asigna a  $\vec{x}$  la intersección de  $S^{n-1} \subset B^n$  con la semirrecta que parte de  $g(\vec{x})$  y pasa por  $\vec{x}$ . Esta  $f$  contradice el resultado anterior porque  $f(\vec{x}) = \vec{x}$  para  $\vec{x} \in S^{n-1}$ .  $\square$

Con ayuda del teorema de Stokes el mismo resultado se puede generalizar.

**Proposición 2.2.9** *Sea  $M$  una variedad compacta orientable y con borde,  $\partial M \neq \emptyset$ . No existe  $f : M \longrightarrow \partial M$  que deje fijos todos los puntos de  $\partial M$ .*

*Demostración:* Por el Teorema 2.2.4 y el Lema 2.2.1,  $I([\omega]) = \int_{\partial M} \omega$  define un homomorfismo no trivial  $H^{n-1}(\partial M) \longrightarrow \mathbb{R}$ . Por otra parte si existiera tal  $f$ ,  $f \circ i$  sería la identidad en  $\partial M$  y por el teorema de Stokes y las propiedades del *pullback*

$$I(\omega) = I(i^* f^* \omega) = \int_M d(f^* \omega) = \int_M f^*(d\omega) = 0$$

porque  $d\omega = 0$ . Esto contradice que  $I$  sea no trivial.  $\square$

**Proposición 2.2.10** Si  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  entonces  $f$  o  $-f$  dejan un punto fijo.

*Demostración:* Supongamos que para todo  $\vec{x} \in S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  se cumple  $\vec{x} \neq f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \neq -f(\vec{x})$ . Entonces  $\mathcal{B} = \{\vec{x}, f(\vec{x})\}$  es base de un subespacio vectorial de dimensión 2. Sea  $F(\vec{x}, t)$  el resultado de girar  $\vec{x}$  un ángulo de  $\pi t$  radianes en sentido positivo con respecto a esta base. Se tiene que  $F$  define una homotopía entre la identidad  $F(\vec{x}, 0) = \vec{x}$  y la aplicación antipodal  $a(\vec{x}) = F(\vec{x}, 1) = -\vec{x}$ , por consiguiente  $a^*$  debe inducir la aplicación identidad en  $H^{2n}(S^{2n}) \cong \mathbb{R}$ . Por otro lado sabíamos que la  $n - 1$ -forma en  $S^{2n}$  dada por

$$\omega = i^* \left( \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{2n+1} \right) \in \Omega^{2n}(S^{2n})$$

es cerrada y no exacta, además  $a^*\omega = (-1)^{2n+1}\omega = -\omega$ . Esto contradice que  $a^*$  sea la identidad en  $H^{2n}(S^{2n})$ .  $\square$

**Corolario 2.2.11 (Teorema de la bola de pelo)** En  $S^{2n}$  no existe un campo de vectores no nulo en todo punto.

Nota: El nombre viene de que si pensamos que en  $S^2$  los vectores tangentes son pelos, no podríamos peinar una bola de pelo sin remolinos o discontinuidades.

*Demostración:* Interpretemos los vectores tangentes en sentido clásico, como flechas en  $\mathbb{R}^{2n+1} \supset S^{2n}$  que en cada punto son perpendiculares al radiovector. Si el campo fuera no nulo se podría normalizar, dando lugar a  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  con  $\vec{x} \cdot f(\vec{x}) = 0$ , en particular  $\vec{x} \neq \pm f(\vec{x})$  y el resultado se sigue de la proposición anterior.  $\square$

Terminemos demostrando la Proposición 2.2.2. Para ello emplearemos un resultado muy abstracto que conviene separar.

**Teorema 2.2.12** Sea  $M$  una variedad y sea  $i_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  la inclusión  $i_t(x) = (x, t)$ . Para cada  $k \geq 0$  existe un operador lineal  $P : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  tal que  $P \circ d + d \circ P = i_1^* - i_0^*$ .

*Demostración:* Consideremos los elementos de  $\Omega^k(M \times \mathbb{R})$  que en una carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n, u))$  se escriben como

$$\omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{y} \quad \omega_2 = f du \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

Definimos

$$P\omega_1 = 0 \quad \text{y} \quad P\omega_2 = \left( \int_0^1 f(x^1, \dots, x^n, t) dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

El operador se extiende por linealidad a todo  $\Omega^k(M \times \mathbb{R})$  (recuérdese el Corolario 1.4.2). Basta por tanto probar el resultado para  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

Un cálculo muestra

$$(i_1^* - i_0^*)(\omega_1) = (f(x, 1) - f(x, 0))dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad (i_1^* - i_0^*)(\omega_2) = 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (P \circ d + d \circ P)(\omega_1) &= P(d\omega_1) = P\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= (f(x, 1) - f(x, 0))dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

donde se ha empleado el teorema fundamental del cálculo (en  $\mathbb{R}$  usamos la carta trivial). Además  $(P \circ d + d \circ P)(\omega_2)$  es igual a

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}\right) + d\left(\int_0^1 f(x, t) dt dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}\right).$$

El primer sumando es  $-\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x, t) dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}$  que compensa exactamente al segundo sumando cuando se deriva bajo el signo integral. Entonces en ambos casos las acciones de  $P \circ d + d \circ P$  y de  $i_1^* - i_0^*$  coinciden.  $\square$

*Demostración de la Proposición 2.2.2:*

a) Sea  $F$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ ,  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$ , que suponemos definida en  $M \times \mathbb{R}$ . con la notación del Teorema 2.2.12,  $f = F \circ i_0$ ,  $g = F \circ i_1$  y por el resultado allí probado, para  $\omega \in \Omega^k(M)$

$$(g^* - f^*)(\omega) = (i_1^* - i_0^*)(F^*\omega) = P(F^*d\omega) + d(P(F^*\omega)).$$

En esta última expresión, para cualquier forma cerrada el primer sumando se anula y el segundo sumando es una forma exacta, por ello  $g^* - f^*$  es la aplicación idénticamente nula cuando actúa sobre  $H^k(N)$ .

b) Por definición y por las propiedades del *pullback*, existen  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow M$  con  $f^* \circ g^*$  y  $g^* \circ f^*$  iguales a la identidad, por tanto  $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  tiene inversa, es decir, es un isomorfismo.  $\square$

Después de estos éxitos mejorando en el ámbito diferenciable lo que conseguía en la Topología de segundo cabe preguntarse acerca de la posible conexión entre ambos métodos. Un profundo resultado de W. Hurewicz relaciona los grupos de homotopía generalizados (introducidos por él mismo) con los de homología que a su vez están relacionados con los de cohomología. En particular, se puede deducir que  $H^1(M)$  no tiene más información que el grupo fundamental  $\pi_1(M, x_0)$  estudiado en segundo.

Otra pregunta natural relacionada es hasta donde llega el poder de los grupos de homología o incluso del humilde grupo fundamental. En el lado negativo, Poincaré encontró una variedad compacta no difeomorfa a la esfera  $S^3$  y que tiene los mismos grupos

de cohomología (incluso en una versión fuerte que supera a la cohomología de de Rham). Él mismo se preguntó si era posible encontrar una variedad tridimensional compacta y conexa que tuviera el mismo grupo fundamental que  $S^3$ , esto es, el trivial. Esta conjetura, llamada *Conjetura de Poincaré* ha resultado ser muy dura y sólo recientemente se ha conocido la respuesta afirmativa después del trabajo de G. Perelman y otros autores. Sorprendentemente el análogo en dimensiones superiores se resolvió antes (S. Smale y M. Freedman recibieron sendas medallas Fields por ello).

## Ejercicios de la sección 2

- 1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
  - i) Si  $M$  es variedad con borde, ¿está  $[\omega] \in H^n(M) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$  bien definido en general?
  - ii) Si  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional compacta orientable con dos componentes conexas, ¿es  $[\omega] \in H^n(M) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$  un isomorfismo?
  - iii) Si  $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta, ¿qué se puede decir de  $A$  y  $B$ ?
  - iv) ¿Es posible aplicar la sucesión de Mayer-Vietoris cuando  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  no son abiertos?
- 2) Demostrar que la aplicación  $H^k(M) \times H^l(M) \longrightarrow H^{k+l}(M)$  dada por  $([\omega], [\eta]) \mapsto [\omega \wedge \eta]$  está bien definida; es decir, que si  $[\omega'] = [\omega]$  y  $[\eta'] = [\eta]$  entonces  $[\omega' \wedge \eta'] = [\omega \wedge \eta]$ . Nota: Esto permite definir un anillo a partir de los grupos de cohomología.
- 3) Demostrar que  $M$  y  $M \times \mathbb{R}$  son variedades homótopas.
- 4) Sea  $M$  una subvariedad de  $N$  (es decir,  $i : M \longrightarrow N$  es una función  $C^\infty$ ). Se dice que  $M$  es un *retracto por deformación fuerte* de  $N$  si existe una homotopía  $F : N \times [0, 1] \longrightarrow N$  tal que para todo  $x \in N$  y  $a \in M$  se cumple  $F(x, 0) = x$ ,  $F(x, 1) \in M$  y  $F(a, t) = a$ . Demostrar que  $M$  y  $N$  son homótopas y por tanto tienen los mismos grupos de cohomología.
- 5) Calcular los grupos de cohomología de  $\mathbb{R}^3$  menos el eje  $Z$ .
- 6) Calcular los grupos de cohomología del toro  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$  expresándolo como una unión de dos cilindros curvados.
- 7) Sea  $f : \mathbb{T} \longrightarrow S^n$ . Demostrar que no existe  $g : S^n \longrightarrow \mathbb{T}$  tal que  $g \circ f$  sea la identidad. *Indicación:* Considerar la acción de  $f^*$  y  $g^*$  en  $H^1$ .
- 8) Calcular los grupos de cohomología de un toro doble, (es decir, una variedad difeomorfa a una esfera con dos asas). *Indicación:* Un toro menos un punto es difeomorfo a un toro menos un disco.
- 9) Calcular los grupos de cohomología de un toro menos dos puntos. *Indicación:* Esto es la intersección de dos toros menos un punto.
- 10) Calcular los grupos de cohomología de  $S^2$  menos dos puntos y de  $S^2$  menos tres puntos.
- 11) Comprobar que el teorema del punto fijo de Brouwer no es cierto si se reemplaza la bola cerrada por una bola abierta.