

Capítulo 3

Geometría riemanniana

3.1. Métricas y geodésicas

En la geometría estudiada hasta ahora en este curso ha habido muy poco de *-metría*: nos ha preocupado sobre todo la invariancia por difeomorfismos y en este sentido hemos estado más cerca de la topología diferencial que de los problemas básicos de geometría elemental en los que se miden ángulos y longitudes o se calculan áreas y volúmenes. Al menos en subvariedades de \mathbb{R}^n y con las ideas de cursos anteriores, sólo necesitamos una manera de medir ángulos y longitudes de los vectores del espacio tangente porque a distancias microscópicas de un punto no hay gran diferencia entre la subvariedad y su espacio tangente en dicho punto.

En suma, lo que se necesita es un producto escalar que opere en el espacio tangente en cada punto. Un producto escalar es algo bilineal y simétrico que asigna a cada par de vectores un número real, es decir, un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$. Si pedimos una condición de no degeneración, tenemos los conceptos de tensor métrico y métrica introducidos en el primer capítulo (al final de las secciones 1 y 3).

Definición: Una *variedad semiriemanniana* es una variedad dotada de una métrica.

Recuérdese que la condición de no degeneración que se pedía a una métrica G es que su matriz de componentes (g_{ij}) fuera no singular. Esto no impide que ocurran cosas raras como $G(\partial_1, \partial_1) = 0$ ó $G(\partial_1, \partial_1) < 0$. Tal comportamiento estrafalario (i vectores con longitudes nulas o imaginarias?) es conveniente en relatividad pero extraño a nuestras ideas geométricas, por ello es natural restringirse a *métricas definidas positivas*, es decir, aquellas para las que la matriz (g_{ij}) es definida positiva en todo punto.

Definición: Una *variedad riemanniana* es una variedad semiriemanniana cuya métrica es definida positiva.

Una variedad semiriemanniana (o en particular riemanniana) es un par (M, G) con M una variedad y G una métrica, pero es habitual decir que M es una variedad semi-

riemanniana si la métrica se sobreentiende o no deseamos darla ninguna denominación particular.

Ejemplo: En \mathbb{R}^n la métrica que corresponde al producto escalar usual es $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ (se ha usado el convenio de sumación) con $g_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso. Ésta es la *métrica usual* y la más empleada, pero hay una infinidad de formas de convertir \mathbb{R}^n en una variedad semiriemanniana.

La forma clásica de expresar una métrica, a veces denostada por los matemáticos, reemplaza productos tensoriales por productos habituales en un sentido formal. Así la métrica usual en \mathbb{R}^2 se escribiría $dx^2 + dy^2$ y la métrica $dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + 10dy \otimes dy$ sería $dx^2 + 2dxdy + 10dy^2$.

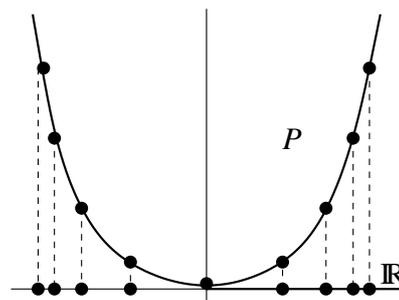
Si (M, G) es una variedad semiriemanniana y N es una subvariedad suya o, más en general, si $f : N \rightarrow M$ es una inmersión¹ entonces $\tilde{G}(\vec{v}, \vec{w}) = G(df(\vec{v}), df(\vec{w}))$ define una métrica en N , llamada la *métrica inducida*. Si no se indica lo contrario, se sobreentiende que f es la inclusión y a veces se denota a la métrica inducida con $i_N G$.

La métrica inducida simplemente expresa la idea de que si sabemos medir en un espacio grande también lo sabemos hacer en un espacio más pequeño. El cálculo de la métrica inducida consiste en expresar las relaciones entre las variables.

Ejemplo: Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$. La métrica usual de \mathbb{R}^2 (con la carta trivial) es $dx \otimes dx + dy \otimes dy$. La inclusión $i : P \rightarrow \mathbb{R}^2$ actúa como $i(x, y) = (x, y)$ pero en P se cumple $y = x^2$, entonces $i_P G = dx \otimes dx + d(x^2) \otimes d(x^2) = (1 + 4x^2)dx \otimes dx$.

Podemos entender esta última métrica como una métrica en \mathbb{R} diferente de la usual $dx \otimes dx$ e interpretar el resultado de cualitativamente de la siguiente forma:

Si un habitante h de P diera pasos igualmente espaciados digamos a velocidad de uno por segundo, y un habitante de \mathbb{R} tuviera visión unidimensional que sólo le permitiera ver la proyección de h , le parecería que h se vuelve más lento cuanto más se aleja del origen. Es como si las distancias allí se hubieran hecho más largas, $1 + 4x^2$ mayor, pues cuesta más tiempo recorrerlas. En \mathbb{R} podría interpretarse matemáticamente que hay una métrica no usual o físicamente que hay una fuerza de la gravedad que pierde intensidad a grandes distancias, como la usual. Nosotros, como habitantes de \mathbb{R}^3 que vemos en más dimensiones² preferimos interpretar la situación diciendo que P está curvado. La relación entre curvatura y métrica será tratada en este capítulo, mientras que la de la



¹Recuérdese de cursos anteriores que una inmersión $f : N \rightarrow M$ es una función tal que df es inyectiva. La inclusión es un caso especial de inmersión.

²El lector puede encontrar interesante la novelita [Ab] de finales del XIX sobre el desencuentro entre seres de distintas dimensiones.

fuerza de la gravedad como una curvatura del espacio-tiempo es la base de la relatividad general estudiada en el próximo capítulo. El decidirse por una u otra interpretación es cuestión de conveniencia, y no es conveniente interpretar la fuerza de Newton como una curvatura ni la teoría de la relatividad como un campo de fuerzas. Nuestro ejemplo es un poco deficiente porque la curvatura se podría eliminar con un cambio de coordenadas: si el observador utilizara las coordenadas correspondientes a estirar P sobre \mathbb{R} , la métrica sería la usual y no habría gravedad. En dimensiones mayores, en general no es posible hacer un cambio de carta que transforme una métrica sobre \mathbb{R}^n en la usual.

Notación: Llamaremos también *métrica usual* a la inducida por la usual en subvariedades de \mathbb{R}^n . Repasando los apuntes de Geometría II comprobamos que no es más que la generalización de la *primera forma fundamental*.

Ejemplo: Hallemos la métrica usual en el paraboloido $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$. Sin preocuparnos de en qué abierto se puede definir, lo más natural es dar la relación entre las variables a través de la carta en coordenadas polares (cilíndricas)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \\ dz = 2r dr \end{cases}$$

Por consiguiente la métrica inducida (en esta carta) es $(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \otimes (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \otimes (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) + 4r^2 dr \otimes dr$. Y esto es

$$(4r^2 + 1)dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.$$

El mismo resultado se obtiene en notación clásica simplemente operando $(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 + 4r^2 dr^2$. La conclusión en cualquier caso es que para radios constantes la longitud en círculos sigue siendo proporcional al ángulo, pero debido a la curvatura del paraboloido la escala de las distancias se van modificando según varía el radio.

Con una métrica podemos medir vectores tangentes. En \mathbb{R}^n , aproximando por vectores tangentes no parece muy complicado llegar a una fórmula para la longitud de un arco de curva, pero ¿qué ocurre con las longitudes, áreas y volúmenes en dimensiones superiores y variedades riemannianas generales? Si intentamos copiar el procedimiento de Cálculo III, debemos dividir en “cubitos elementales” n -dimensionales y sumar (integrar) sus volúmenes. Los “cubitos elementales” no son otra cosa que los cubos unitarios que tienen aristas que determinan bases ortonormales escalados a tamaño infinitesimal. La ortonormalidad de una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ cuando tenemos una métrica G significa que $G(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$ es 1 si $i = j$ y cero en el resto de los casos. A través de la máquina que mide volúmenes de estos cubos unitarios se puede construir la que mide volúmenes en variedades riemannianas.

Definición: Sea M una variedad riemanniana orientable n -dimensional. Se dice que una forma de volumen $\omega \in \Omega^n(M)$ es un *elemento de volumen* si $\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \pm 1$ para cada base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de cada $T_p(M)$, $p \in M$.

Definición: Se llama *volumen n -dimensional* de una variedad riemanniana orientable conexa n -dimensional a $\text{Vol}(M) = \left| \int_M \omega \right|$ donde ω es un elemento de volumen de M .

La unicidad del elemento de volumen salvo cambios de signo en cada componente conexa es fácil. La existencia y el propio cálculo están incluidos en el siguiente resultado. El paso de una carta a toda la variedad es trivial usando la orientabilidad.

Proposición 3.1.1 *Sea (M, G) una variedad riemanniana orientable. Supongamos que empleando la carta $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ las componentes de G son g_{ij} , entonces $\omega = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ es un elemento de volumen en \mathcal{U} .*

Demostración: Si expresamos los vectores de una base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ en términos de la base natural $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$, tendremos $\vec{v}_i = a_i^k \partial_k$ y por la ortonormalidad, $G(a_i^k \partial_k, a_j^l \partial_l) = a_i^k g_{kl} a_j^l$ es 1 si $i = j$ y cero en otro caso. Tomando determinantes es fácil ver que $\det(a_k^l)^2 \cdot \det(g_{ij}) = 1$. Por otro lado, $(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n)(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \det(a_k^l)$, entonces $\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \sqrt{\det(g_{ij})} \det(a_k^l) = \pm 1$. \square

Ejemplo: Sea $M = \{(x, y, 1 - x^2 - y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ con la métrica usual. Con la carta proyección $\phi(x, y, z) = (x, y)$, la métrica se escribe como $G = dx \otimes dx + dy \otimes dy + d(1 - x^2 - y^2) \otimes d(1 - x^2 - y^2) = (1 + 4x^2)dx \otimes dx - 4xy(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (1 + 4y^2)dy \otimes dy$. Por tanto el elemento de volumen es

$$\omega = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx \wedge dy.$$

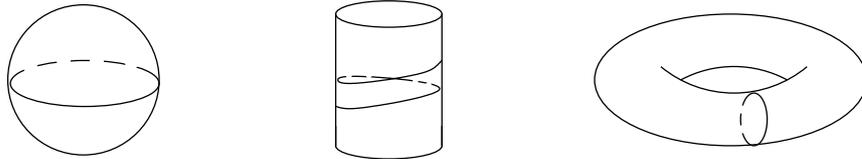
Entonces el volumen bidimensional, esto es, el área, de M viene dado por la integral $\int_{x^2+y^2 < 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$ que se calcula fácilmente en coordenadas polares.

Una métrica sirve para hallar longitudes de vectores del espacio tangente, pero ¿cómo mediríamos la distancia entre puntos de una variedad riemanniana? Esta pregunta lleva al concepto de geodésica que nosotros introduciremos aquí con una orientación mecánica que nos aleja de lo que es común en los libros de geometría pero tiene la ventaja de acercarnos a algunas ideas fundamentales.

Supongamos que para calcular la distancia de p a q lanzamos desde p con velocidad 1 una partícula sobre la que no actúa ninguna fuerza y medimos el tiempo que tarda en llegar a q . Desde el principio atisbamos problemas, por ejemplo, si p y q no están en

la misma componente conexa, la partícula nunca llega. Todavía peor, en $\mathbb{R}^2 - \{(1, 1)\}$ si desde $p = (0, 0)$ apuntamos a $q = (2, 2)$ la trayectoria recta que seguiría la partícula tropieza con un agujero. Un boquete de grandes dimensiones proyectaría todavía una sombra mayor de puntos inalcanzables.

Olvidemos por ahora estas dificultades y supongamos que operamos localmente, en entornos pequeños, donde estos problemas de ocultamiento no aparecen. Nuestro interés pasa a ser entonces cómo se mueve una partícula ligada a una variedad sobre la que no actúan fuerzas externas. Con poco que recordemos el curso de Física, sabemos que $\vec{F} = m\vec{a}$. En ausencia de fuerzas, $\vec{F} = \vec{0}$, la aceleración \vec{a} que es la derivada segunda de la ecuación de movimiento es nula y la trayectoria³ es una recta parametrizada linealmente por el tiempo. Pero esto sólo funciona en \mathbb{R}^3 , si tuviéramos una partícula ligada a una esfera, digamos una canica entre dos peceras, nuestra intuición nos dice que (descartando la gravedad) al darle un impulso desde un punto inicial debe seguir círculos máximos con velocidad angular constante (incluso podríamos dar una explicación en términos de fuerzas centrífugas (véase §2.2 en [Ch]). En un cilindro la trayectoria sería en general una hélice (ésta pasa a ser una recta cuando lo desenrollamos sobre el plano) y en otras superficies, como el toro, tenemos cierta intuición acerca de algunas de las trayectorias aunque no sabemos cómo describirlas todas.



¿Cómo hallamos estas ecuaciones de movimiento? ¿Es posible hacerlo de manera invariante sin estar obligados a usar un sistema especial de coordenadas? Con relación a esta última pregunta, nótese que la ecuación $\vec{F} = \vec{0}$ deja de tener validez en coordenadas polares, las rectas cartesianas en general no corresponden a funciones lineales de radios y ángulos; por ejemplo, la recta horizontal $y = 1$ es $r = 1/\sin \theta$ cuando usamos polares. Podemos obligarnos en este caso a usar coordenadas cartesianas pero ¿qué sistema de coordenadas emplearíamos en el toro o la esfera? no haya ninguno con todos los privilegios. Hay que tratar de formular la mecánica de manera invariante, y eso empieza a oler a tensor.

Una partícula en \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$ ó 3) sobre la que no actúan fuerzas tiene una energía cinética

$$E = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2.$$

³La ecuación de movimiento es la fórmula para el espacio en función del tiempo y la trayectoria es el dibujo de la curva que sale al sustituir los valores de t . Así, $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$ y $c_2(t) = (\sin t^2, \cos t^2)$ serían dos ecuaciones de movimiento distintas con la misma trayectoria porque la misma circunferencia se recorre con velocidades bien distintas.

Tomemos prestada la notación de los físicos heredada de Newton consistente en señalar una derivada con un punto sobre la función (y dos derivadas con dos puntos). Si para simplificar suponemos que la masa es $m = 2$ (siempre se puede hacer cambiando de unidades), se tiene

$$E = G(\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}})$$

con G la métrica usual. Si ahora empleásemos una carta arbitraria $(\mathcal{U}, \phi = (q^1, \dots, q^n))$ y describimos la trayectoria de la partícula con $\vec{q} = \vec{q}(t)$, la fórmula es todavía válida pero las componentes de la métrica G cambian de carta

$$E = G(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}) = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

La notación q^j también está tomada de la Física donde se dice que éstas son las *coordenadas generalizadas* de la partícula. Por ejemplo, como la métrica usual es \mathbb{R}^2 , $dx \otimes dx + dy \otimes dy$, se escribe en polares como $dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$, entonces la energía en polares es $E = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$. Quizá el lector reconozca esta fórmula de la dinámica de rotación.

Resulta que la Naturaleza es muy ahorrativa⁴ y, al menos localmente, trata de economizar la energía y las partículas aquí consideradas se mueven entre puntos cercanos de forma que la suma (integral) de todas las energías en su trayectoria sea mínima. Esto conduce a un problema matemático muy importante y posiblemente nuevo para el lector: en lugar de buscar un valor de la variable que haga mínima una función, se busca una función que haga mínima una integral, esto es lo que se llama un problema de *cálculo de variaciones*⁵. Calcularemos la trayectoria de nuestras partículas resolviendo este problema utilizando la fórmula para la energía en términos de la métrica usual (o definiremos la energía en términos de la métrica en una variedad semiriemanniana si no es subvariedad de \mathbb{R}^n) con las coordenadas que nos apetezcan, o mejor, con las que más convenientes sean. El problema de minimizar es intrínsecamente libre de coordenadas (por ejemplo, los valores máximos y mínimos que alcanza $f(x)$ son los mismos que los que alcanzan $f(x^3)$ o $f(3x - \sin x)$).

Proposición 3.1.2 *Dados $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ y $\vec{a}_0, \vec{a}_1 \in \mathbb{R}^n$ sea $\mathcal{C} = \{F = (q^1, \dots, q^n) : q^j \in C^2([a, b]), F(t_0) = \vec{a}_0, F(t_1) = \vec{a}_1\}$. Supongamos que $\int_a^b \mathcal{L}$ con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, F(t), \dot{F}(t))$ alcanza un máximo o un mínimo en \mathcal{C} para cierta F , entonces F es solución de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange:*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

⁴Se atribuye a Euler la frase: “Dado que el tejido del Universo es de la mayor perfección y la obra del más sabio Creador, nada en absoluto tiene lugar en el Universo sin que una regla de máximo o mínimo aparezca”.

⁵El origen de esta área se remonta al siglo XVII con el problema de la *braquistocrona* que consiste en el diseño de la forma del tobogán que une dos puntos por el que se puede bajar más rápido (véase el problema 23 en [Ch] §2.2).

Observación: Esta notación clásica puede resultar desconcertante y requiere alguna explicación: la parcial con respecto a \dot{q}^k significa la parcial con respecto al k -ésimo lugar donde se sustituye $\dot{F}(t)$ y la derivada total $\frac{d}{dt}$ supone implícitamente que consideramos todas las variables como funciones de t . Nada más instructivo que dar un vistazo a los ejemplos.

Demostración: Si la integral alcanza un extremo en \mathcal{C} para $F = F_0(t)$ entonces para cualquier otra función $\alpha = \alpha(t)$ como F pero con $\alpha(t_0) = \alpha(t_1) = \vec{0}$ se cumple que la función real

$$f(\epsilon) = \int_a^b \mathcal{L}(t, F_0(t) + \epsilon\alpha(t), \dot{F}_0(t) + \epsilon\dot{\alpha}(t)) dt$$

alcanza un extremo en $\epsilon = 0$. Nuestros conocimientos de Cálculo I llevan a $f'(0) = 0$. Derivando bajo el signo integral y con una integración por partes

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \alpha^j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{\alpha}^j \right) = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right) \alpha^j$$

donde α^j son las componentes de α . como éstas son arbitrarias, la única posibilidad para que la integral sea siempre nula es que se cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange. \square

Ejemplo: Sea G la métrica usual en \mathbb{R}^2 y \mathcal{L} la energía cinética $\mathcal{L} = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$. En coordenadas cartesianas $\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ (se ha escrito ($q^1 = x$, $q^2 = y$)). Los cálculos para las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (2\dot{x}) = 2\ddot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

y lo mismo con y . Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

que se resuelven como $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a_0, b_0)$. Esto concuerda con nuestra idea de que en ausencia de fuerzas las trayectorias son rectilíneas (principio de inercia). En coordenadas polares, como habíamos visto, $\mathcal{L} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} & \Rightarrow \quad \ddot{r} = r\dot{\theta}^2, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} & \Rightarrow \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Estas ecuaciones tan complicadas todavía representan las mismas trayectorias rectilíneas. Por ejemplo, podemos comprobar que $r(t) = 1/\sin \theta(t)$ con $\cot \theta(t) = t$, correspondiente a la recta horizontal antes mencionada, es solución.

En Cálculo I, los máximos y mínimos locales están asociados a puntos críticos, pero puede haber puntos críticos que no correspondan necesariamente a extremos. De la misma forma el resultado anterior no asegura que obtengamos máximos o mínimos al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo tenemos un procedimiento operativo en el caso de una métrica porque por la teoría de ecuaciones diferenciales tendremos una solución para cada punto inicial y cada vector de derivadas (velocidad inicial), lo que determina una única curva parametrizada, lo suficiente para hacer una definición matemática con sentido que además cuadra con la idea Física de que la posición y velocidad inicial determinan la ecuación de movimiento de una partícula.

Antes de nada veremos que es posible escribir una fórmula general para las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen en el caso en que \mathcal{L} proviene de una métrica. Los ejemplos nos mostrarán que esta fórmula no es demasiado útil en ejemplos concretos, sin embargo es conveniente disponer de ella en teoría.

Aprovechamos para introducir un nuevo convenio para representar las derivadas parciales

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^k} \text{ se abrevia como } f_{,k}}$$

que se superpone con la notación anterior $\partial_k f$. Éstas y otras convenciones son las que dan al cálculo tensorial un aspecto tan taquigráfico y misterioso, es la “debacle de los índices” según [Sp1t2].

Definición: Sea (g_{ij}) la matriz formada de componentes de una métrica G y sea (g^{ij}) su matriz inversa. Se llaman *símbolos de Christoffel* a

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}).$$

Los g^{ij} son las componentes de un tensor dos veces contravariante. Esto es, existe un tensor tal que sus componentes en cualquier carta conforman la matriz inversa de la matriz de componentes de la métrica. Sin embargo los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k no son componentes de un tensor: al cambiar de carta no respetan las fórmulas de cambio de carta vistas en el primer capítulo. Nótese que la simetría de los g_{ij} implica las relaciones $g^{ij} = g^{ji}$ y $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Lema 3.1.3 Si $\mathcal{L} = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ con g_{ij} las componentes de una métrica, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son $\ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$.

Demostración: Derivando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{d}{dt} (2g_{kj} \dot{q}^j) = 2g_{kj,i} \dot{q}^i \dot{q}^j + 2g_{kj} \ddot{q}^j, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir, por tanto, como

$$2g_{kj}\ddot{q}^j - g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j = -2g_{kj,i}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

En el segundo miembro podemos renombrar arbitrariamente los índices de sumación i y j . Si los intercambiamos y sumamos las ecuaciones resultantes, se deduce

$$g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}(g_{kj,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})\dot{q}^i\dot{q}^j = 0.$$

Multiplicando por g^{lk} se obtiene la ecuación del enunciado. \square

Definición: Se dice que una curva parametrizada⁶ $c = c(t)$ en una variedad semiriemanniana n -dimensional es una *geodésica* si en cada carta (\mathcal{U}, ϕ) con $\text{Im } c \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, las funciones $(\phi \circ c)(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Por supuesto, se supone que los Γ_{ij}^k están evaluados en el punto $c(t)$.

Como hemos notado antes, el curso de ecuaciones diferenciales asegura que para cada vector punto y cada vector tangente hay una geodésica. Por otro lado, también el mismo curso nos hace sospechar acertadamente que rara vez tendremos soluciones explícitas de estos sistemas, en general no lineales, de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo: Calculemos los símbolos de Christoffel en \mathbb{R}^2 en coordenadas polares y las correspondientes ecuaciones de las geodésicas.

La métrica usual en estas coordenadas era $dr^2 + r^2d\theta^2$ (en notación moderna $dr \otimes dr + r^2d\theta \otimes d\theta$). Entonces

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}.$$

Como ambas matrices son diagonales, en la definición de los símbolos de Christoffel podemos suponer $m = k$, porque otro valor de m contribuiría con un sumando nulo. Por consiguiente

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kk}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}).$$

De aquí se deduce, tras cálculos aburridos pero triviales

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

⁶Con la denominación *curva parametrizada* nos referimos a curvas como las consideradas en el primer capítulo para definir el espacio tangente: aplicaciones de un intervalo real en la variedad con derivada no nula.

Con ello volvemos a encontrar las ecuaciones (3.1) para las geodésicas en concordancia con el Lema 3.1.3.

Cualquiera que haya pasado por los cálculos anteriores se percatará que la deducción de (3.1) fue más directa usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y el Lema 3.1.3 nos asegura que de ellas podemos obtener los símbolos de Christoffel. Esto funciona bien como método de cálculo de los Γ_{ij}^k en casos sencillos. El lector incrédulo debería cronometrar cuánto tardaría en completar su cálculo el siguiente ejemplo a partir de la definición.

Ejemplo: Hallemos los símbolos de Christoffel en S^2 cuando se usa la carta en esféricas $\phi = (\theta, \varphi)$ con el significado habitual ($x = \cos \varphi \sin \theta$, $y = \sin \varphi \sin \theta$, $z = \cos \theta$).

Un cálculo (ejercicio) prueba que la métrica usual en esféricas es

$$G = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$$

o en notación clásica $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$, lo que lleva a considerar $\mathcal{L} = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$. Y se obtiene inmediatamente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 4\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0.$$

Por consiguiente las ecuaciones de las geodésicas son

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

que comparadas con la definición implican $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cos \theta / \sin \theta$, $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$ y que el resto de los símbolos de Christoffel son cero.

dicho sea de paso, con estas ecuaciones tenemos que el ecuador parametrizado por la longitud de arco, $\theta = \pi/2$, $\varphi = t$, y los meridianos, $\varphi = \text{cte}$, $\theta = t$, son geodésicas. El resto de los círculos máximos convenientemente parametrizados también lo son, simplemente con un argumento de simetría, pero no vemos esas soluciones a simple vista en la ecuación porque en coordenadas esféricas no tienen una ecuación sencilla.

En los cursos de Física básicos no se habla de la minimización de la energía sino de que la energía ni se crea ni se destruye, es constante. La traducción en nuestro lenguaje empleando una métrica es que los vectores tangentes a una geodésica obtenida obtenidos al derivar (las velocidades) tienen longitud constante. Esto se puede deducir fácilmente con el material de la próxima sección, no obstante jugaremos un poco con la ecuación para practicar y obtener una prueba a partir de la definición.

Lema 3.1.4 Si $c = c(t)$ es una geodésica, con la notación anterior se cumple que $g_{ij}(t) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$ es constante, donde $g_{ij}(t) = g_{ij}(x^1(t), \dots, x^n(t))$.

Demostración: Derivando (no se indica la dependencia en t)

$$\frac{d}{dt} \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) = g_{ij,k} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + 2g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2x^j}{dt^2}.$$

Por otro lado la ecuación de las geodésicas se puede escribir como (véase la demostración del resultado anterior o la definición de los símbolos de Christoffel)

$$g_{ij} \frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt}.$$

Sustituyendo $g_{ij} d^2x^j/dt^2$ en la fórmula anterior, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) = \frac{1}{2}(g_{kj,i} - g_{ij,k}) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

y esto es cero porque a cada sumando se le puede asignar su negativo intercambiando i por k . \square

Una curiosa propiedad del resultado anterior es que las geodésicas en variedades riemannianas también son solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la *longitud de arco*

$$\int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

Que esta expresión sea la longitud de arco, se puede deducir a partir del elemento de volumen con la métrica inducida sobre la curva o por analogía con la fórmula euclídea $\int_a^b \|c'(t)\| dt$.

Proposición 3.1.5 *Las geodésicas son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\mathcal{L} = \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}$.*

Demostración: Derivando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} &= \mathcal{L}^{-1} g_{ij} \dot{q}^j, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= (2\mathcal{L})^{-1} g_{kj,i} \dot{q}^k \dot{q}^j, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) &= -\mathcal{L}^{-2} \frac{d\mathcal{L}}{dt} g_{ij} \dot{q}^j + \mathcal{L}^{-1} g_{ij,k} \dot{q}^k \dot{q}^j + \mathcal{L}^{-1} g_{ij} \ddot{q}^j. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.4 $d\mathcal{L}/dt = 0$ y empleando $g_{ij,k} \dot{q}^k \dot{q}^j = (g_{ij,k} + g_{ik,j}) \dot{q}^k \dot{q}^j / 2$ se deduce

$$g_{ij} \ddot{q}^j + \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) \dot{q}^k \dot{q}^j = 0.$$

que son ecuaciones que satisfacen las geodésicas. \square

Ejercicios de la sección 1

- 1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
- i) Si una métrica es definida positiva, ¿lo es la métrica inducida en cualquier subvariedad?
 - ii) ¿Cómo se podría deducir de un ejemplo de esta sección que los símbolos de Christoffel no son tensores?
 - iii) ¿Por qué en dimensión 4 hay como mucho 40 símbolos de Christoffel distintos? ¿Cuántos hay en dimensión 5?
 - iv) ¿Por qué $r = t$, $\theta = t$ no es una geodésica en \mathbb{R}^2 usando coordenadas polares?
- 2) Hallar la métrica inducida en el hiperboloide $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ usando la carta (definida en cierto abierto) $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.
- 3) Probar que la métrica usual en esféricas es $G = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$.
- 4) Sea G la métrica inducida en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ usando la carta proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Demostrar que la base natural del espacio tangente $\{\partial_1, \partial_2\}$ no es en general ortogonal, esto es, $G(\partial_1, \partial_2) \neq 0$. Repetir el problema para la carta dada por los ángulos en esféricas. (Nota: De resultados posteriores se podrá deducir que es imposible hallar una carta en la que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea ortonormal en un abierto).
- 5) Hallar alguna carta del cilindro de radio 3 de manera que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea ortonormal con la métrica inducida.
- 6) Sea M una subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} de dimensión n y sea X un campo normal unitario, esto es, un campo de vectores en \mathbb{R}^{n+1} que en cada punto $p \in M$ es ortogonal a los vectores de $T_p(M)$ (interpretados como vectores de \mathbb{R}^{n+1} como en cursos anteriores).
- a) Probar que $\omega(\cdot, \dots, \cdot) = \det(X, \cdot, \dots, \cdot)$ es un elemento de volumen.
 - b) Deducir que

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$$

es un elemento de volumen en S^n .

7) Dar una fórmula general para el elemento de volumen de una superficie de revolución en \mathbb{R}^3 (con la métrica usual). Demostrar con ello la bien conocida fórmula $2\pi \int f \sqrt{1 + (f')^2}$.

8) Demostrar que

$$r = (\cos \theta + \sin \theta)^{-1} \quad \text{con} \quad \theta = \arctan \frac{t}{\sqrt{2} - t}$$

define una geodésica en \mathbb{R}^2 con la métrica en polares $dr^2 + r^2 d\theta^2$. *Indicación:* No es necesario siquiera escribir la ecuación de las geodésicas.

9) Calcular las geodésicas con θ constante usando la métrica $dr^2 - r^2 d\theta^2$.

10) Comprobar que

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad z(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

define el ecuador de S^2 (salvo un punto). Comprobar que sin embargo no satisface la ecuación de las geodésicas y explicar la aparente contradicción.

11) Calcular los símbolos de Christoffel para la métrica $dr^2 + 4 \sinh^2 r d\theta^2$ y hallar alguna de las geodésicas.

12) Calcular los símbolos de Christoffel para \mathbb{R}^3 usando coordenadas esféricas (r, θ, φ) . *Indicación:* Como $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ son ortogonales, de antemano sabemos que en la métrica no aparecerán los términos cruzados $drd\theta, drd\varphi, d\theta d\varphi$, lo cual simplifica los cálculos iniciales.

13) Calcular los símbolos de Christoffel y las geodésicas de \mathbb{R}^2 con la métrica $du^2 + 4vdudv + 8v^2dv^2$.

14) Calcular los símbolos de Christoffel y alguna geodésica del semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la métrica de Poincaré $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$.

15) Considérese la banda $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ con la métrica definida por

$$ds^2 = \frac{4}{(1-x^2)^2} dx^2 + xy dx dy + (1+x^2+y^2) dy^2.$$

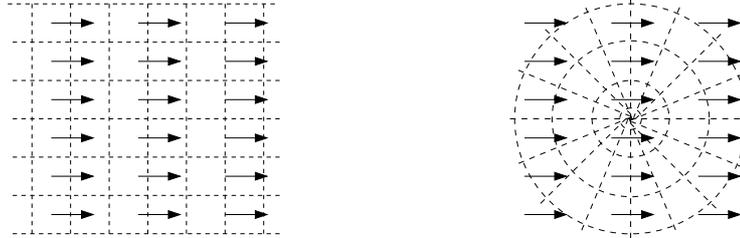
Utilizar que la energía es constante para calcular las geodésicas horizontales de M sin necesidad de hallar los símbolos de Christoffel.

3.2. Cálculo tensorial

La pregunta fundamental que tratamos de responder en este capítulo es cómo derivar campos tensoriales. Sabemos derivar funciones en variedades sin embargo ya habíamos dejado caer que las derivadas de las componentes de un tensor no se transforman como un tensor. En pocas palabras, la derivada de un tensor no es un tensor. Lo que veremos es que en una variedad semiriemanniana hay una derivada buena, de hecho exactamente una, que preserva la tensorialidad y tiene ciertas propiedades básicas.

Tal derivada no es un artificio abstracto para divertimento de los matemáticos, sino que tiene una motivación geométrica muy natural sugerida por las aplicaciones. Lo que hay detrás es el estudio de las variaciones de la velocidad (aceleraciones) cuando el sistema desde el que medimos también está en movimiento y quizá no con velocidad constante. El lector instruido quizá reconozca aquí el papel asignado en mecánica a los *sistemas inerciales* para que estos problemas no aparezcan. Tanto la relatividad de Galileo como la especial de Einstein dependen de estos sistemas inerciales mientras que la aspiración de la relatividad general es, como en geometría, tener plena libertad para elegir las coordenadas.

Supongamos, por ejemplo, un campo de vectores en \mathbb{R}^2 que a cada punto le asigna el vector unitario constante dirigido hacia la derecha, esto podría representar el campo de velocidades de las partículas de arena en un desierto llano bajo la acción de un viento oeste-este.



La aceleración de las partículas debe ser nula, lo cual es claro en coordenadas cartesianas porque el campo es sencillamente $\partial/\partial x$ y, por tanto, tiene componentes constantes $(1, 0)$. Sin embargo en coordenadas polares

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

y el campo tiene ahora por componentes $\cos \theta$ y $-r^{-1} \sin \theta$ que no son constantes. La explicación intuitiva es que, por ejemplo, la derivada con respecto de θ involucra un incremento infinitesimal de θ con lo cual hay un pequeño cambio en la dirección de la base $\{\partial/\partial r, \partial/\partial \theta\}$ y a un observador que la use como sistema de referencia le parecerá que el campo de vectores ha girado un poco en sentido negativo debido a una misteriosa fuerza de Coriolis⁷. De este ejemplo debemos deducir que para derivar un campo de vectores no basta con derivar sus componentes sino también la base en donde se expresan éstas.

Consideremos ahora el problema en general. Supongamos que V es un campo de vectores que en cierta carta de la variedad se escribe como $V^i \partial_i$ (es decir, tiene componentes V^i). Para derivar “bien” V con respecto a la j -ésima variable, aplicando la regla del producto deberíamos escribir

$$V^i_{,j} \partial_i + C^k_{ij} V^i \partial_k = (V^k_{,j} + C^k_{ij} V^i) \partial_k$$

donde los C^k_{ij} son las componentes de la “derivada” de ∂_i con respecto a la j -ésima variable, son los números que expresan la variación de la base al cambiar de punto.

⁷Si caminamos desde el borde de un tiiovivo hacia el centro, aunque sigamos dando el mismo número de vueltas por minuto, al principio iremos más rápido (se recore una distancia mayor por ser una circunferencia mayor) y después más lentos. En reacción a este frenazo aparece una fuerza en la dirección de giro que tuerce nuestra trayectoria, ésta es la fuerza de Coriolis asociada a los sistemas de referencia que giran.

En un contexto más amplio se dice que determinan una *conexión de Koszul* (véase la definición en §3 [ON] o en §6 [Sp1t2]), una forma de derivar. La elección de los C_{ij}^k es en principio bastante arbitraria, hay infinitas conexiones posibles en una variedad. Las cosas cambian si tenemos una métrica que se debe respetar. Fijados i y j , $G(\partial_i, \partial_j)$ asigna a cada punto de la carta fijada un número real, es decir, es una función y se debe derivar de la forma habitual, sin embargo según lo dicho anteriormente las “derivadas buenas” de ∂_i y de ∂_j se escriben en términos de los C_{ij}^k . Si queremos que la derivada de toda la vida sea compatible con la nueva y que se cumpla la regla del producto para G análoga a la del producto escalar usual: $(\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f}' \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \vec{g}'$, nos vemos forzados a pedir

$$\frac{\partial}{\partial x^k} G(\partial_i, \partial_j) = G(C_{ik}^l \partial_l, \partial_j) + G(\partial_i, C_{jk}^l \partial_l).$$

Es decir,

$$(3.2) \quad g_{ij,k} = C_{ik}^l g_{lj} + C_{jk}^l g_{il}.$$

Por otro lado, si C_{ij}^k lo que mide es la variación de ∂_i en la j -ésima variable, esto es, en la dirección de ∂_j , es natural suponer

$$(3.3) \quad C_{ij}^k = C_{ji}^k$$

por la igualdad de las parciales cruzadas. Pues bien, resulta que estos misteriosos números quedan totalmente caracterizados por (3.2) y (3.3). Una pequeña sorpresa es que no son desconocidos para nosotros.

Lema 3.2.1 *Las únicas cantidades C_{ij}^k que verifican simultáneamente (3.2) y (3.3) son los símbolos de Christoffel $C_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$.*

Demostración: Como los índices i, j y k son arbitrarios, podemos permutarlos a nuestro antojo. Con lo cual (3.2) implica

$$(g_{ij,k} - C_{ik}^l g_{lj} - C_{jk}^l g_{il}) + (g_{jk,i} - C_{ji}^l g_{lk} - C_{ki}^l g_{jl}) - (g_{ki,j} - C_{kj}^l g_{li} - C_{ij}^l g_{kl}) = 0.$$

Que usando (3.3) y simplificando se escribe como

$$g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} = 2C_{ik}^l g_{lj}.$$

Multiplicando por g^{jm} (nótese que $g_{lj} g^{jm} = \delta_l^m$) se obtiene

$$\frac{1}{2} g^{jm} (g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}) = C_{ik}^m$$

que es la definición de los símbolos de Christoffel. \square

Ahora ya estamos preparados para dar un nombre a la derivada buena.

Definición: Sea una variedad semiriemanniana con un campo de vectores que en cierta carta $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ se expresa como $V = V^i \partial_i$. Se llama *derivada covariante* de V a un tensor de tipo $(1, 1)$, que denotaremos ∇V , cuyas componentes son

$$V_{;j}^i = V_{,j}^i + \Gamma_{kj}^i V^k$$

y se llama derivada covariante respecto de x^j al campo de vectores $\nabla_j \vec{V} = V_{;j}^i \partial_i$.

Con nuestra definición no está claro que ∇V sea un tensor de tipo $(1, 1)$. Si V^i son las componentes de V en una carta compatible $(\mathcal{V}, \phi = (x'^1, \dots, x'^m))$ se cumple $V^i = V^k \partial x'^i / \partial x^k$ y derivando y aplicando la regla de la cadena

$$V_{;j}^i = \frac{\partial}{\partial x'^j} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right) V^k + \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial V^k}{\partial x'^j} = \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} V^k + \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} V_{,m}^k \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}.$$

La tensorialidad de la derivada covariante, es decir, la relación

$$V_{;j}^i + \Gamma_{kj}^i V^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} (V_{,m}^k + \Gamma_{lm}^k V^l)$$

equivale según la relación anterior a

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} V^k + \Gamma_{kj}^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} V^l = \Gamma_{lm}^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} V^l.$$

Renombrando k como l en el primer sumando esta fórmula se cumple en general si y sólo si la ley de transformación de los símbolos de Christoffel es

$$\Gamma_{kj}^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} = \Gamma_{lm}^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} - \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}.$$

A partir de la definición de los símbolos de Christoffel y la tensorialidad de los g_{ij} esto es un cálculo, pero lo suficientemente tedioso y rutinario como para no incluirlo aquí.

Ejemplo: Si tomamos el campo en \mathbb{R}^2 que en coordenadas polares se escribe como

$$V = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

ya habíamos visto que corresponde a un campo constante en coordenadas cartesianas, así pues $V_{;j}^i = 0$ en cartesianas y por la tensorialidad, en cualquier sistema de coordenadas. Si uno se empeñase en hacer los cálculos a partir de la definición obtendría el mismo resultado con más esfuerzo.

Ejemplo: El campo en \mathbb{R}^2 que se escribe en polares $\phi = (r, \theta)$ como $V = \partial / \partial \theta$ tiene sus componentes constantes $V^1 = 0$, $V^2 = 1$ pero $\nabla V \neq 0$ porque la base de $T_p(\mathbb{R}^2)$ en polares va girando de punto a punto. Unos cálculos prueban:

$$V_{;1}^1 = \Gamma_{k1}^1 V^k = 0, \quad V_{;1}^2 = \Gamma_{k1}^2 V^k = \frac{1}{r}, \quad V_{;2}^1 = \Gamma_{k2}^1 V^k = -r, \quad V_{;2}^2 = \Gamma_{k2}^2 V^k = 0.$$

Si $c = c(t)$ es una curva parametrizada y $\phi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ para cierta carta $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$, la manera natural de definir la *derivada covariante a lo largo de una curva* es, en analogía con la derivada direccional

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_j V \frac{dx^j}{dt}$$

donde se sobreentiende que $\nabla_j V$ está evaluado en $c(t)$. Si pensamos en V como función de t a lo largo de c , esto también se puede escribir como

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k V^i \frac{dx^j}{dt} \right) \partial_k.$$

La siguiente definición es simple notación.

Definición: Se dice que un campo vectorial V es un *transporte paralelo* a lo largo de una curva parametrizada $c = c(t)$ si $DV/dt = 0$.

Observación: Partiendo de un vector $V_0 \in T_{c(t_0)}(M)$ se puede resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $DV/dt = 0$, $V(c(t_0)) = V_0$, por ello tiene sentido hablar del transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva.

Ejemplo: En \mathbb{R}^n con la métrica usual y la carta trivial, los campos de vectores constantes son transportes paralelos a lo largo de cualquier curva, o dicho de otra forma, el transporte paralelo de un vector no lo modifica.

Con estas definiciones podemos entender las geodésicas todavía de otra manera, simplemente son las curvas tales que su campo de vectores tangentes (de velocidades) es un transporte paralelo. Mecánicamente son ecuaciones de movimiento con aceleración nula en un sentido generalizado, lo cual permite reescribir el principio de inercia $d^2x^i/dt^2 = 0$, sólo válido en coordenadas cartesianas y para partículas en \mathbb{R}^n , como $Dc'/dt = 0$ que sirve en cualquier sistema de coordenadas y para partículas ligadas a variedades.

La definición de la derivada covariante se puede extender a otros tensores que no son campos de vectores. Lo más inmediato es la extensión a uno formas por dualidad: Si ω es un campo de uno formas fijado, para cualquier campo de vectores V , se tiene que $\omega(V) = \omega_i V^i$ es una función escalar. Derivando

$$f = \omega_i V^i \Rightarrow f_{,j} = \omega_{i,j} V^i + \omega_i V_{,j}^i$$

que puede ser escrito por la definición de derivada covariante como

$$f_{,j} - \omega_i V_{,j}^i = (\omega_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \omega_k) V^i.$$

El primer miembro se transforma como un tensor de tipo $(0, 1)$, así que el término entre paréntesis debe transformarse como un tensor de tipo $(0, 2)$. Como mide la variación de ω , es lógico tomar como definición de derivada covariante de ω el tensor de componentes

$$\omega_{i;j} = \omega_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \omega_k.$$

Podríamos repetir el mismo razonamiento para tensores de tipos superiores aplicándolos a vectores y uno formas hasta obtener un escalar. La conclusión es siempre la misma y es que cada índice contravariante (superíndice) contribuye con un símbolo de Christoffel positivo y cada índice covariante (subíndice) con uno negativo. Por ejemplo, para tensores de tipos (0, 2), (1, 1) y (2, 0) serían

$$T_{ij;k} = T_{ij,k} - \Gamma_{jk}^l T_{il} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} \quad T_{j;k}^i = T_{j,k}^i - \Gamma_{jk}^l T_{il}^i + \Gamma_{lk}^i T_j^l \quad T_{;k}^{ij} = T_{,k}^{ij} + \Gamma_{lk}^j T^{il} + \Gamma_{lk}^i T^{lj}$$

y así sucesivamente. Considerando, como habíamos convenido, las funciones como tensores de tipo (0, 0), por analogía, su derivada covariante no debe involucrar ningún símbolo de Christoffel y por tanto coincide con la derivada usual.

Con esta definición general se verifica la regla del producto

$$\nabla(S \otimes T) = (\nabla S) \otimes T + S \otimes \nabla T.$$

Esto es mucho más sencillo de lo que pudiera parecer a simple vista: el producto tensorial lo único que hace es añadir índices y basta hacer la derivada correspondiente a los primeros y añadirle la correspondiente a los otros.

Igualando un subíndice y un superíndice, se tiene que esta regla del producto también se satisface si hay contracciones en vez de productos tensoriales. Por ejemplo

$$(S_j^i T_k^j)_{;l} = S_{j;l}^i T_k^j + S_j^i T_{k;l}^j, \quad (S^i T_i)_l = (S^i T_i)_{;l} = S_{;l}^i T_i + S^i T_{i;l}, \quad \text{etc.}$$

Para practicar con estas notaciones, demostraremos lo que a veces se llama *lema de Ricci*.

Lema 3.2.2 *Se verifica $\delta_{j;k}^i = g_{ij;k} = g_{;k}^{ij} = 0$.*

Demostración: Según la definición

$$\delta_{j;k}^i = \delta_{j,k}^i - \Gamma_{jk}^l \delta_l^i + \Gamma_{lk}^i \delta_j^l = 0 - \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^i = 0.$$

Por la definición y (3.2)

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma_{jk}^l g_{il} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} = 0.$$

Se podría demostrar de forma parecida, aunque más elaborada, que $g_{;k}^{ij} = 0$ pero es más sencillo relacionar los tres tensores. Por la regla del producto

$$\delta_l^i = g^{ij} g_{jl} \Rightarrow \delta_{l;k}^i = g_{;k}^{ij} g_{jl} + g^{ij} g_{jl;k} \Rightarrow 0 = g_{;k}^{ij} g_{jl}.$$

Como g_{jl} es no singular, se deduce $g_{;k}^{ij} = 0$. \square

La primera igualdad del lema es muy intuitiva. A fin de cuentas δ_j^i es algo así como el “tensor identidad”. La segunda (y por tanto la tercera) lo parece menos pero no es más

que el trasunto de la sencilla fórmula en \mathbb{R}^n : $(\vec{v} \cdot \vec{w})_{,k} = \vec{v}_{,k} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}_{,k}$ y la generalización de esta propiedad estaba implícita en (3.2), una de las propiedades de las que dedujimos la definición de derivada covariante. Que las componentes g_{ij} del tensor métrico se comporten como constantes a la hora de derivar y que el tensor de componentes g^{ij} tenga la misma propiedad, permite por contracción subir y bajar índices a voluntad sin tener particulares consecuencias en el cálculo tensorial. Por ejemplo podemos transformar un campo de vectorial, un tensor de tipo $(1, 0)$, en otro de tipo $(0, 1)$, es decir un campo de uno formas con:

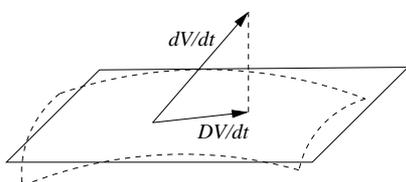
$$V = V^i \partial_i \quad \mapsto \quad \omega = g_{ij} V^j dx^i.$$

De la misma forma se puede proceder en sentido contrario. Por ejemplo, dada una función se puede asignar a la uno forma que corresponde a su gradiente: $\omega = f_{,i} dx^i$ el campo de vectorial $V = g^{ij} f_{,j} \partial_i$, el verdadero *vector* gradiente. Se pueden combinar subidas y bajadas de índices cuando tenemos tensores de tipo mayor.

Como caso particular de estas ideas se deduce

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

y cuando V y W son el campo de vectores tangentes a una geodésica se deduce inmediatamente el Lema 3.1.4.



Para conciliar el significado de la derivada covariante a lo largo de una curva con el que quizá se mencionó en Geometría II y darle una interpretación más intuitiva, consideremos el caso de una hipersuperficie M en \mathbb{R}^{n+1} (esto es una subvariedad n -dimensional con la métrica usual). Dada una curva parametrizada en M considerada como función

$c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y un campo vectorial definido en su imagen $V(c(t)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, aunque los $V(c(t))$ sean tangentes a M su derivada coordenada a coordenada no lo es necesariamente, por ello consideramos su proyección ortogonal sobre $T_{c(t)}(M)$ visto como hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} . Este proceso de derivar y proyectar tiene las propiedades (3.2) y (3.3), la segunda por la igualdad de las parciales cruzadas y la primera porque $(\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f}' \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \vec{g}'$ sigue siendo cierto si sumamos a \vec{f}' y a \vec{g}' vectores ortogonales a \vec{g} y \vec{f} . Como ambas propiedades determinan la definición de la derivada covariante, entonces DV/dt puede interpretarse como la proyección ortogonal de la derivada del campo de vectores (evaluado en la curva) sobre el hiperplano tangente y las geodésicas son las curvas tales que la derivada de sus vectores tangentes (la aceleración) es siempre un vector normal (la partícula no sufre una fuerza real si está ligada a la subvariedad). Esto permite identificar sin cálculos todas las geodésicas en una esfera y alguna de ellas en un toro usual.

Terminamos con una breve incursión en el tema de las propiedades minimizantes de las geodésicas en las variedades riemannianas y la posibilidad de usar la métrica para definir una distancia en ellas. Ambos temas estuvieron en la motivación al comienzo del capítulo. Las pruebas son asequibles con el material aquí introducido pero las sustituiremos por referencias y algún comentario para no hacer una disgresión demasiado extensa.

Una curva parametrizada en una variedad riemanniana M , $c : [0, 1] \rightarrow M$, hereda la métrica y por tanto un elemento de volumen que permite definir la longitud de c entre $c(0)$ y $c(1)$ de la forma obvia:

$$L(c) = \int_0^1 \sqrt{G(c'(t), c'(t))} dt$$

que es invariante por reparametrizaciones. Supongamos que M es conexa, entonces dados dos puntos $p, q \in M$ siempre existe una curva parametrizada C^∞ a trozos⁸ que conecta ambos puntos y tiene sentido definir

$$d_M(p, q) = \inf\{L(c) : c \text{ es } C^\infty \text{ a trozos con } c(0) = p \text{ y } c(1) = q\}.$$

Se puede probar (§4.7 [Bu-Gi], VI.4 [Ga-Ru]) que d_M es una distancia en M y que la topología métrica es la misma que la de M . Si M es completa, esto es, si con la topología métrica es un espacio topológico completo⁹ entonces hay un mínimo: el ínfimo se alcanza para las geodésicas y reparametrizaciones suyas (Cor.4.7.6 [Bu-Gi], [ON]). La propiedad de ser completo no es gratuita, por ejemplo si $M = \mathbb{R}^2$ el ínfimo en $d_M((-1, -1), (1, 1))$ se alcanza para la recta que une los dos puntos pero, como ya apuntábamos en la primera sección, en $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ no se alcanza el ínfimo para ninguna curva (hay ínfimo pero no mínimo). Todavía más, el *teorema de Hopf-Rinow* ([Bu-Gi], [ON]) afirma que M es completa si y sólo si las geodésicas se pueden extender indefinidamente, es decir, si se pueden definir como curvas $c : \mathbb{R} \rightarrow M$.

Para probar la propiedad minimizante de las geodésicas todo se reduce al problema local, para curvas que unen un punto p con otro en un pequeño entorno. La clave está en definir la *aplicación exponencial* de Gauss que a cada vector de $\mathcal{V} = \{\vec{v} \in T_p(M) : G(\vec{v}, \vec{v}) < \epsilon\}$ le asigna el valor en 1 de la geodésica con $c(0) = p$, $c'(0) = \vec{v}$. Esto da lugar a un difeomorfismo $\exp_p : \mathcal{V} \subset T_p(M) \rightarrow \mathcal{U}(p) \subset M$. Con $(\exp_p)^{-1}$ se puede “elevar” cualquier curva que conecta p con un punto cercano a otra en $T_p(M)$ que parte del origen $\vec{0}$. En $T_p(M)$, que es como \mathbb{R}^n , se tiene la métrica y por la triangular se deduce que los caminos más cortos son las rectas. Por otra parte las rectas que parten del origen corresponden por \exp_p a geodésicas que parten de p .

⁸En realidad se puede pedir que sea simplemente C^∞ . Consideramos aquí la situación más general de regularidad C^∞ a trozos por coherencia con las referencias citadas.

⁹Véase la definición exacta en [Mu], intuitivamente podemos pensar que no le falta ningún punto límite.

Ejercicios de la sección 2

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si los coeficientes del tensor métrico son constantes, ¿a qué es igual la derivada covariante?

ii) Si multiplicamos la métrica por una constante no nula, ¿qué ocurre con la derivada covariante?

iii) Si V es un campo de vectores y f una función escalar, ¿cuál es la derivada covariante de fV ?

iv) Si $\nabla V = \nabla W = 0$, ¿es $G(V, W)$ constante?

2) Si C es la matriz $(V_{;j}^i)$ con V un campo en \mathbb{R}^2 (con la métrica usual) cuando se usan coordenadas cartesianas y P es la matriz correspondiente cuando se emplean coordenadas polares, demostrar la relación:

$$J^{-1}CJ = P \quad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

3) Sea el campo en \mathbb{R}^2 que en coordenadas polares viene dado por $V = \partial/\partial\theta$. Calcular su derivada covariante y comprobar la relación del problema anterior.

4) Supongamos que se tiene una métrica en \mathbb{R} (con la carta trivial) tal que $\nabla_1 V = 2007$ para $V = \partial_1$.

a) Demostrar que el transporte paralelo de $V_0 = \partial_1$ desde $x = 0$ a $x = t$ a lo largo de la recta que une estos puntos es $e^{-2007t}\partial_1$. En particular, la derivada covariante de $V = e^{-2007x}\partial_1$ es nula.

b) Hallar todas las posibles métricas en \mathbb{R} para las que la derivada covariante responde a esta fórmula.

5) Sea $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la métrica $G = y^{-2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$. Calcular la derivada covariante de $V = f(y)\partial/\partial x$. Hallar f para que la derivada covariante a lo largo de la semirrecta $x = 0, y = t > 1$ sea nula.

6) Comprobar la relación $\nabla(S \otimes T) = (\nabla S) \otimes T + S \otimes \nabla T$ cuando S y T son campos vectoriales o de uno formas.

7) Probar la fórmula $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle$.

8) Consideremos una subvariedad de \mathbb{R}^n (con la métrica inducida). Probar que si $V(p)$ se transporta paralelamente en $V(q)$ y $W(p)$ se transporta paralelamente en $W(q)$ a lo largo de cierta curva conectando p y q , entonces interpretando V y W como vectores en \mathbb{R}^n se cumple $\|V(p)\| = \|V(q)\|$, $\|W(p)\| = \|W(q)\|$ y $\angle(V(p), W(p)) = \angle(V(q), W(q))$ donde \angle indica el ángulo.

9) Sean dos superficies $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ con la métrica inducida que son tangentes a lo largo de una curva. Probar que el transporte paralelo por ella es igual tanto si se lleva a cabo por S_1 como si se lleva a cabo por S_2 .

3.3. El tensor de curvatura

El objetivo de esta sección es dar una definición intrínseca del concepto de curvatura en una variedad semiriemanniana, esto quiere decir una definición que no dependa del espacio ambiente en que pueda estar inmersa la variedad sino solamente de la forma en que medimos: la métrica. Antes de ello daremos un repaso de cierta extensión a las curvaturas estudiadas en cursos anteriores. El lector impaciente puede saltarse todos estos párrafos y pasar directamente a la definición del tensor de Riemann.

En Geometría II se definió la curvatura en cada punto de una curva en \mathbb{R}^2 como el módulo de la derivada segunda de una parametrización por longitud de arco, es decir, de aquella cuya derivada tiene módulo uno o equivalentemente tal que la métrica inducida es $dt \otimes dt$. Esta definición es invariante por movimientos del plano pero no puede ser intrínseca porque cualquier porción curvada de hilo inextensible se transforma en un segmento tirando de los extremos. Ningún gusanito unidimensional que viviera dentro del hilo notaría cambios en las distancias después de esta transformación que anula la curvatura.



Si $c(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización por longitud de arco $c' = \vec{t}$, el vector tangente unitario, entonces $0 = (c' \cdot c')' = 2c'' \cdot c'$ y se tiene $c''(t) = \kappa \vec{n}$ con κ la curvatura y \vec{n} el vector normal unitario. De aquí se deduce que la curvatura con un signo adecuado es la variación del ángulo θ del vector tangente respecto a los ejes cartesianos porque

$$\theta' = \left(\arctan \frac{y'}{x'} \right)' = \frac{y''x' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} = \frac{\kappa \|\vec{t} \times \vec{n}\|}{\|\vec{t}\|^2} = \kappa.$$

Entonces la integral de la curvatura es el incremento total del ángulo del vector tangente al ir de un extremo al otro. En el caso de una curva compacta, $C \subset \mathbb{R}^2$, la integral es el número total de vueltas de la tangente y como la única variedad compacta unidimensional es S^1 , salvo difeomorfismos, se cumple con la orientación usual

$$(3.4) \quad \int_C \kappa d\eta_C = 2\pi$$

donde η_C es el elemento de volumen, $\eta_C = dt$ si la parametrización es por longitud de arco. Podemos ver esto como un resultado de topología diferencial: si deformamos la curvatura aquí y allá en S^1 , mágicamente la integral compensa esas deformaciones.

Sea $f : C \rightarrow S^1$ es la aplicación que a cada punto de la curva le asigna su vector tangente unitario. Si t parametriza a C por longitud de arco, empleando el elemento

de volumen en $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dado por $\eta_{S^1} = d\theta$ y la relación $\theta = \arctan(y'/x')$ para una determinación adecuada del arco tangente, se tiene $f^*\eta_{S^1} = (y''x' - x''y')dt = \kappa\eta_C$. Así pues también podemos entender la curvatura como la función por la que hay que multiplicar el elemento de volumen η_C en C para obtener el *pullback* del elemento de volumen en la circunferencia, simbólicamente

$$\kappa = \frac{f^*\eta_{S^1}}{\eta_C}.$$

Por supuesto esta representación es libre de coordenadas pero sigue sin ser intrínseca.

Incrementando en uno la dimensión las cosas se complican deliciosamente y da lugar a una bella teoría fruto del ingenio de C.F. Gauss. Si tenemos una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ hay todo un plano de vectores tangentes en cada punto que dan innumerables direcciones para calcular derivadas segundas. Podemos salvar todavía parte de la analogía notando que en las curvas en \mathbb{R}^2 es lo mismo la variación del ángulo de las tangentes que el de las normales. En S consideramos la *aplicación de Gauss* $f : S \rightarrow S^2$ que asigna a cada punto su normal y definimos la *curvatura de Gauss* como

$$K = \frac{f^*\eta_{S^2}}{\eta_S} \quad \text{donde } \eta_S = \text{elemento de volumen en } S.$$

Si uno volviera a los apuntes de Geometría II podría interpretar esto como el cociente que aparecía allí de los determinantes de la segunda y primera formas fundamentales. Con un poco de trabajo se deduce de esto la definición alternativa $K(p) = k_1(p)k_2(p)$ donde $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son las curvaturas máxima y mínima en p entre todas las curvas obtenidas al cortar S con un plano que pasa por p y que es perpendicular al plano tangente en dicho punto.

La aplicación de Gauss permite asignar a cada porción de superficie T un ángulo sólido en S^2 (se dice que su área es la medida del ángulo de T en *estereorradianes*) y entonces K es de nuevo una variación del ángulo generalizada. El teorema de Stokes permite relacionar $\int_T K d\eta_S$ con una integral sobre ∂T , la curva de la frontera que resulta ser (salvo una cantidad constante) la integral de la derivada covariante de los vectores tangentes. Si se toma como región T un triángulo geodésico, esto es un triángulo curvo cuyos lados son geodésicas, la derivada covariante es cero pero hay que pagar con ciertos términos debido a la no diferenciabilidad en los vértices. El resultado escrito en forma elegante es el famoso *teorema de Gauss-Bonnet* probado por Gauss en 1827:

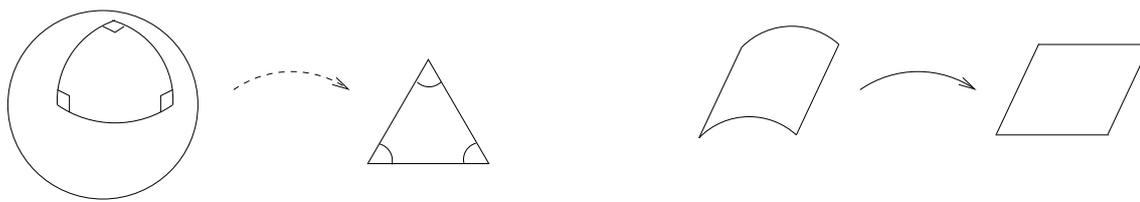
$$(3.5) \quad \int_T K d\eta_S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

para cualquier triángulo geodésico de ángulos α , β y γ . Por otro lado (3.4) se puede generalizar a

$$\int_S K d\eta_S = 2\pi(2 - \dim H^1(S))$$

para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ compacta con la orientación usual. Por ejemplo, si S es difeomorfa a una esfera, la integral de la curvatura es 4π y si es difeomorfa a un toro, la integral es cero.

Cuando Gauss obtuvo (3.5) se percató que si T es un pequeño triángulo geodésico alrededor de un punto p se sigue $K(p) \approx (\alpha + \beta + \gamma - \pi)/A(T)$ donde $A(T)$ indica el área de T , pero un ser bidimensional que viviera dentro de S sin saber nada acerca de normales ni del mundo exterior de \mathbb{R}^3 podría hacer el cálculo de $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)/A(T)$. Justificando el paso al límite se concluye que, a pesar de la definición original, la curvatura de Gauss para superficies de \mathbb{R}^3 sólo depende de la métrica, es intrínseca. Esto es lo que se llama *Teorema Egregio* (Theorema Egregium en el original de Gauss). La fórmula para K en función de los coeficientes de la métrica es un poco complicada (tiene catorce sumandos, véase p.109 [Sp1t2]) y anticipa que en más dimensiones se podrán hacer pocos cálculos explícitos generales. El Teorema Egregio por ejemplo implica que una porción de esfera ($K = R^{-2}$) no se puede desarrollar sobre un plano ($K = 0$), es decir, aplastarla sin modificar distancias.



Esto también es consecuencia del hecho más elemental de que la suma de los ángulos de un triángulo geodésico en la esfera es mayor que π y en el plano es exactamente π . Por otro lado una porción de cilindro sí es desarrollable en el plano y con cualquiera de las definiciones anteriores se tiene $K = 0$.

La generalización a más dimensiones no es clara porque ni siquiera está clara la definición de la curvatura de Gauss para variedades bidimensionales que no estén inmersas en \mathbb{R}^3 . El teorema de Gauss-Bonnet en una forma un poco más general apuntada anteriormente permite relacionar $\int_T K d\eta_S$ con la variación de un vector después de aplicarle un transporte paralelo dando toda la vuelta a ∂T . En más dimensiones podríamos considerar el paralelogramo infinitesimal T dado por incrementos en dos funciones coordenadas (preferible a un triángulo geodésico sólo por razones técnicas), tomar un vector y hallar el vector que da la razón de la variación de V entre el área de T , el análogo de $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)/A(T)$, para deducir el Teorema Egregio. De esta forma la curvatura es una máquina a la que hay que alimentar con la dos direcciones que determinan un paralelogramo y la que determina el vector, dando lugar a otro vector que se podría pasar a un número con un elemento del dual, lo que sugiere un tensor de tipo $(1, 3)$. Es posible proceder de este modo y llegar bastante rápido al “formulón” (3.6) de más adelante (véase §2.3 [Ch]) a cambio de usar argumentos cantidades arbitrariamente pequeñas y aproximaciones euclídeas. Éste es un precio demasiado alto, por ello los libros

para matemáticos suelen dejar aparte esta línea e introducen sintéticamente un tensor que mide la diferencia entre las derivadas covariantes cruzadas. En realidad la idea es la misma pues el transporte paralelo está ligado a la derivación covariante que a su vez es la única manera sensata de calcular incrementos, de derivar, en una variedad.

Definición: Se llama *tensor de Riemann* o *tensor de curvatura* al tensor de tipo $(1, 3)$ de componentes R^i_{jkl} tal que para cada campo de vectores V se verifica

$$V^i_{;lk} - V^i_{;kl} = R^i_{jkl} V^j$$

donde $V^i_{;lk}$ indica la derivada covariante primero con respecto a l y después con respecto a k .

El carácter tensorial del tensor de Riemann se deduce de la tensorialidad de la derivada covariante. Con un cálculo rutinario se llega a una fea fórmula en términos de los símbolos de Christoffel

$$(3.6) \quad R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk} \Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{jk}.$$

Ejemplo: \mathbb{R}^n con la métrica usual tiene tensor de Riemann nulo. Esto se deduce de la definición porque la derivada covariante coincide con la usual, o directamente de (3.6) porque $\Gamma^i_{jk} = 0$.

El ejemplo anterior tiene un recíproco local: si en una variedad riemanniana el tensor de Riemann es nulo entonces se pueden encontrar un difeomorfismo en un entorno de cada punto que transforma este entorno en un abrieto de \mathbb{R}^n con la métrica usual. Todavía más, B. Riemann introdujo explícitamente en 1862 su tensor justamente para resolver este problema de saber qué métricas se podían transformar localmente en la métrica usual¹⁰. Dicho sea de paso, este recíproco también se aplica a variedades semiriemannianas si se permite cambiar signos en la métrica usual.

El cálculo de la curvatura se revela como una tare ardua aunque sólo sea por el número de componentes que en dimensiones 2, 3 y 4 son respectivamente 16, 81 y 256. Afortunadamente hay algunas simetrías que relacionan las componentes. Además en los casos de dimensión 2 y 3 y las aplicaciones en dimensión 4 que aparecen en relatividad general hay contracciones del tensor de Riemann que contienen toda la información necesaria. Al contraer un tensor de tipo $(1, 3)$ se obtiene un tensor dos veces covariante. Subiendo uno de los índices con g^{ij} se puede efectuar una segunda contracción para llegar

¹⁰En realidad Riemann ya había anticipado el problema en su famosísima lección “*Sobre las hipótesis que subyacen a la geometría*” en 1854. En ella expuso muchas y muy importantes ideas pero apenas empleó ninguna fórmula para conservar el tono expositivo. Una traducción del original e información histórica al respecto puede encontrarse en el capítulo 4 de [Sp1t2].

a una función. En principio hay diferentes maneras de elegir los índices para efectuar las contracciones pero debido a las simetrías, todas son esencialmente iguales o nulas.

Definición: Se llama *tensor de Ricci* al tensor de tipo $(0, 2)$ cuyas componentes son

$$R_{ij} = R_{ikj}^k$$

y *tensor de Ricci contravariante* al tensor de tipo $(2, 0)$ de componentes $R^{ij} = g^{ia}g^{jb}R_{ab}$. Además, se llama *curvatura escalar* a la función $R = g^{ij}R_{ij}$.

La prueba de todas las simetrías del tensor de Riemann a partir de (3.6) sería computacionalmente muy gravosa. Lo más cómodo es emplear sistemas especiales de coordenadas en los que haya una simplificación considerable. El siguiente resultado es una posibilidad que procede del propio Riemann.

Lema 3.3.1 *Sea M una variedad semiriemanniana y sea p uno de sus puntos. Existe una carta tal que las derivadas parciales primeras de las componentes del tensor métrico se anulan en p .*

Demostración: Dada una carta $(\mathcal{U}(p), \phi = (x^1, \dots, x^m))$, sea $\phi(p) = (p_1, \dots, p_n)$ y consideremos una nueva carta $(\mathcal{U}', \phi' = (x'^1, \dots, x'^m))$, $p \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}(p)$, con ϕ' definida por el cambio

$$x'^i = x^i - p^i + \frac{1}{2}(x^r - p^r)(x^s - p^s)\Gamma_{rs}^i.$$

Derivando en ambos miembros se tiene

$$(3.7) \quad \left. \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \right|_p = \delta_i^a \quad \left. \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^k \partial x^i} \right|_p = \Gamma_{ki}^a(p).$$

De aquí, el teorema de la función inversa asegura que el cambio de carta es legítimo en un entorno pequeño. Sean g'_{ij} las componentes del tensor métrico usando (\mathcal{U}', ϕ') . Por la tensorialidad

$$g_{ij} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \frac{\partial x'^b}{\partial x^j} g'_{ab}.$$

De donde se deduce, gracias a (3.7), $g_{ij}(p) = g'_{ij}(p)$. Derivando, también se obtiene

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial x'^b}{\partial x^j} g'_{ab} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x'^b}{\partial x^k \partial x^j} g'_{ab} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \frac{\partial x'^b}{\partial x^j} \frac{\partial x'^l}{\partial x^k} \frac{\partial g'_{ab}}{\partial x'^l}.$$

Sustituyendo en el punto p y usando (3.7), se tiene

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_p = \Gamma_{ki}^a(p)g_{aj}(p) + \Gamma_{kj}^b(p)g_{ib}(p) + \left. \frac{\partial g'_{ij}}{\partial x'^k} \right|_p$$

y del Lema 3.2.1 se deduce que el último sumando debe ser nulo. \square

Las simetrías del tensor de Riemann son más claras si se baja el único índice contravariante para obtener un tensor de tipo $(0, 4)$.

Proposición 3.3.2 Sea $R_{ijkl} = g_{in}R_{jkl}^n$ entonces se cumplen las identidades

$$a) R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \quad b) R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0.$$

Demostración: Por el Lema 3.3.1 y (3.6) para cada punto $p \in M$ existe una carta tal que

$$R_{jkl}^i(p) = \Gamma_{jl,k}^i(p) - \Gamma_{jk,l}^i(p)$$

y también en este punto p , que omitiremos para mayor brevedad, se cumple

$$g_{in}\Gamma_{jl,k}^n = \frac{1}{2}g_{in}g^{nm}(g_{jm,lk} + g_{ml,jk} - g_{jl,mk}) = \frac{1}{2}(g_{ji,lk} + g_{il,jk} - g_{jl,ik}).$$

Intercambiando l y k y restando, se tiene por el lema anterior

$$R_{ijkl} = g_{in}R_{jkl}^n = \frac{1}{2}(g_{il,jk} - g_{jl,ik} - g_{ik,jl} + g_{jk,il})$$

de donde se deduce inmediatamente $a)$ y $b)$ en p con esta carta. Por otra parte, si las componentes de dos tensores coinciden usando una carta, también coinciden usando cualquier otra. Así que las identidades $a)$ y $b)$ tienen validez general. \square

Ejemplo: En dimensión 2 las 16 componentes del tensor de Riemann se reducen a sólo una independiente. Si en i, j, k, l hay más de dos unos o doses se tiene $R_{ijkl} = 0$ por la antisimetría $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$. Entonces la única posibilidad es que haya exactamente dos unos y dos doses y todas las componentes no nulas son R_{1212} o su negativo.

En el caso de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 , Gauss expresó la curvatura con una sola cantidad así que debe haber una relación entre R_{1212} y la curvatura de Gauss. No puede ser de igualdad porque R_{1212} es una componente de un tensor de tipo $(0, 4)$ y la curvatura de Gauss K es una función. La fórmula exacta es

$$(3.8) \quad R_{1212} = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)K$$

que se puede tomar como definición de K . Si llamamos \mathcal{R} al tensor de Riemann en su forma $(0, 4)$ y η_S al elemento de volumen, se tiene la relación $\mathcal{R} = K\eta_S \otimes \eta_S$.

Ejemplo: Deduzcamos la relación entre la curvatura escalar y la curvatura de Gauss para superficies inmersas en \mathbb{R}^3 . Como ambas son funciones, tensores de tipo $(0, 0)$, cabe esperar una relación lineal entre ellas. Por definición se tiene $R_{jl} = g^{ik}R_{ijkl}$. De aquí, usando las simetrías, $R_{11} = g^{22}R_{1212}$, $R_{12} = R_{21} = -g^{12}R_{1212}$, $R_{22} = g^{11}R_{1212}$. Entonces $R = g^{ij}R_{ij}$ y (3.8) implican $R = 2(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2)(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)K$. El producto de ambos paréntesis vale uno porque es el determinante de una matriz por el de su inversa, por tanto la curvatura escalar es el doble de la curvatura de Gauss.

Se puede probar que en una variedad semiriemannian general no hay nuevas relaciones lineales entre las componentes R_{ijkl} que no se deduzcan de la Proposición 3.3.2, sin embargo hay algunas otras entre sus derivadas covariantes que desempeñan un papel importante en relatividad general. Enunciamos el resultado esta vez en términos de R_{jkl}^i aunque para R_{ijkl} sería idéntico.

Proposición 3.3.3 (Identidad de Bianchi) Sean R_{jkl}^i las componentes del tensor de Riemann, entonces

$$R_{jkl;m}^i + R_{jmk;l}^i + R_{jlm;k}^i = 0.$$

Demostración: Derivando la definición del tensor de curvatura, con la carta del Lema 3.3.1 se cumple en un punto p

$$R_{jkl,m}^i(p) = \Gamma_{jl,km}^i(p) - \Gamma_{jk,lm}^i(p).$$

Como los símbolos de Christoffel se anulan en p , por la definición de derivada covariante, se tiene que $R_{jkl;m}^i = R_{jkl,m}^i$ (siempre en dicho punto). Tras esta observación, sumando la fórmula anterior permutando cíclicamente l , k y m se obtiene el resultado deseado. \square

El tensor de Ricci tiene una simetría sencilla heredada de las del tensor de Riemann.

Proposición 3.3.4 Se cumple

$$a) R_{ij} = R_{ji}, \quad b) R^{ij} = R^{ji}, \quad c) R_{;j}^{ij} = \frac{1}{2}g^{ij}R_{;j}.$$

Demostración: Si en la Proposición 3.3.2 b) multiplicamos por g^{ki} (por supuesto respetando el convenio de sumación) se obtiene

$$R_{jkl}^k + g^{ki}R_{iljk} + g^{ki}R_{iklj} = 0.$$

Por otra parte, la antisimetría en j y k de R_{iklj} , por la Proposición 3.3.2 a), muestra que el último sumando se anula y se puede escribir

$$0 = R_{jkl}^k - g^{ki}R_{ilkj} = R_{jkl}^k - R_{lkj}^k = R_{jl} - R_{lj}.$$

Lo cual prueba a) y se sigue b) inmediatamente. Para probar c) partimos de la identidad de Bianchi contrayendo en i y k .

$$R_{jkl;m}^k + R_{jmk;l}^k + R_{jlm;k}^k = 0.$$

El primer sumando es $R_{jl;m}$ y el segundo, después de usar la antisimetría $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$ es $-R_{jm;l}$. Multiplicando por $g^{jl}g^{im}$ (nótese que multiplicar por estos objetos conmuta con la derivación covariante por el Lema 3.2.2), se tiene

$$g^{im}R_{;m} - R_{;l}^{il} + g^{jl}g^{im}R_{jlm;k}^k = 0.$$

El último término es

$$g^{jl}g^{im}g^{kn}R_{n,jlm;k} = g^{jl}g^{im}g^{kn}R_{lmn;j;k} = g^{im}g^{kn}R_{mnj;k}^j = -g^{im}g^{kn}R_{mn;k} = -R_{;k}^{ik}$$

y se obtiene la fórmula deseada. \square

Pese a las simetrías el cálculo de las componentes del tensor de Riemann es bastante trabajoso. Por ejemplo, en dimensión 4 habría que aplicar (3.6) una vez por cada una de las 20 componentes independientes. Teniendo en cuenta que hay 40 símbolos de Christoffel descontando las simetrías, incluso casos especiales en los que la mayor parte de ellos son nulos requerirán un esfuerzo considerable. Una de las utilidades de la teoría de formas diferenciales creada por Cartan es que permite una interpretación del tensor de curvatura libre de coordenadas como cierta matriz de dos formas (véase el capítulo 7 de [Sp1t2]). Uno de los subproductos de ello es un método para calcular las componentes del tensor de curvatura cuando la métrica es diagonal ($g_{ij} = 0$ si $i \neq j$) o en general si la métrica se puede escribir como $\theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 + \dots + \theta^n \otimes \theta^n$ con θ^i uno formas sencillas (véase en [GoJ] el caso de superficies). No cubriremos aquí este interesante tema. En su lugar, terminaremos estableciendo una simplificación en el cálculo del tensor de Ricci.

Proposición 3.3.5 *Si g es el determinante de la matriz de componentes de la métrica, se cumple*

$$R_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|}\Gamma_{ij}^k)_{,k} - (\log \sqrt{|g|})_{,ij} - \Gamma_{li}^k \Gamma_{jk}^l.$$

Demostración: Consideramos sólo el caso $g > 0$, el otro es completamente similar. Probaremos en primer lugar la identidad

$$(3.9) \quad \Gamma_{ik}^k = (\log \sqrt{g})_{,i} = \frac{g_{,i}}{g}.$$

Sea \vec{v}_i el vector cuya componente j -ésima es g_{ij} , entonces al ser el determinante una función multilineal

$$g_{,i} = \sum_{k=1}^n \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k,i}, \dots, \vec{v}_n).$$

Desarrollando el determinante por la k -ésima columna se tiene $g_{,i} = g_{jk,i}G^{jk}$ con G^{jk} el cofactor del elemento g_{jk} que por álgebra lineal elemental es gg^{kj} . De aquí, por la simetría de g^{kj}

$$g_{,i} = gg^{kj}g_{jk,i} = gg^{kj}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) = 2g\Gamma_{ik}^k$$

lo cual prueba (3.9).

Utilizando esta relación se sigue

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g}\Gamma_{ij}^k)_{,k} = \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l + \Gamma_{ij,k}^k \quad \text{y} \quad (\log \sqrt{g})_{,ij} = \Gamma_{ik,j}^k.$$

Es decir, la fórmula del enunciado equivale a

$$R_{ij} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{kl}^l \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{li}^k \Gamma_{jk}^l$$

y esto se deduce de (3.6) y la definición $R_{ij} = R_{ikj}^k$. \square

Ejemplo: Calculemos el tensor de Ricci de la superficie de una esfera de radio a con la métrica usual que en coordenadas esféricas es $a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$. Los símbolos de Christoffel no nulos calculados en un ejemplo anterior (el radio a no influye) son $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cos \theta / \sin \theta$ y se cumple $g = a^4 \sin^2 \theta$. Por el resultado anterior

$$R_{11} = -(\log \sin \theta)_{,11} - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 = 1, \quad R_{12} = R_{21} = 0,$$

$$R_{22} = -\frac{1}{\sin \theta}(\sin^2 \theta \cos \theta)_{,1} + 2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta.$$

La curvatura escalar es $R = g^{ij} R_{ij} = 2a^{-2}$. Como debe ser el doble de la curvatura de Gauss, se tiene $K = a^{-2}$ en concordancia con lo visto en cursos anteriores. De (3.8) se sigue $R_{1212} = a^2 \sin^2 \theta$ y empleando la Proposición 3.3.2 se deducen todas las componentes del tensor de Riemann.

Ejercicios de la sección 3

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Por qué un cilindro tiene curvatura de Gauss nula cuando es obvio que está curvado?
 ii) ¿Cuáles son las componentes del tensor de Riemann para \mathbb{R}^2 si usamos coordenadas polares?

iii) ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento? Siempre se puede encontrar una carta tal que los símbolos de Christoffel se anulen en un punto, por tanto el tensor de curvatura será nulo en dicho punto. Pero si se anula usando una carta se anula usando cualquiera. Repitiendo el argumento en cada punto se deduce que el tensor de curvatura es siempre idénticamente nulo.

iv) ¿Por qué $R^{ij} = R^{ji}$ se sigue de $R_{ij} = R_{ji}$?

2) Demostrar que no es posible encontrar una carta de S^2 (dotada de la métrica usual) de forma que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea una base ortonormal de $T_p(M)$ para todo p en un abierto. ¿Cuál debe ser el tensor de curvatura para la variedades riemannianas que tienen el análogo n -dimensional de esta propiedad?

3) En una variedad consideramos las métricas $g_{ij} dx^i dx^j$ y $\lambda g_{ij} dx^i dx^j$ donde λ es una constante.

a) Encontrar qué relación hay entre los tensores de Riemann correspondientes a ambas métricas.

b) Responder a la pregunta anterior para la curvatura escalar.

4) Demostrar que $R^i_{ikl} = 0$ y que $R^i_{jki} = -R_{jk}$.

5) Hallar el tensor de Riemann en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dotado con la métrica $dx^2 + y^2 dy^2$ y explicar el resultado.

6) Hallar todas las componentes del tensor de Ricci para el semiplano de Poincaré $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ que tiene por métrica $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. *Indicación:* De ejercicios anteriores sabíamos que los únicos símbolos de Christoffel no nulos son $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = -y^{-1}$.

7) Hallar la curvatura escalar en el ejercicio anterior y comprobar la relación de sus derivadas parciales con la derivada covariante del tensor de Ricci.

8) Comprobar que con la métrica $B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$, se cumple la igualdad $R_{1212} = rB'/(2B^2)$.

9) Demostrar que para las métricas de la forma $A(x, y)dx^2 + B(x, y)dy^2$ se tiene $R_{12} = R_{21} = R^{12} = R^{21} = 0$. *Indicación:* No es necesario calcular los símbolos de Christoffel, sólo usar las simetrías del tensor de Riemann.

Bibliografía

- [Ab] E.A. Abbott. *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Dover Publications thrift edition, 2007.
- [Bi-Go] R.L. Bishop, S.I. Goldberg. *Tensor analysis on manifolds*. Dover Publications, Inc., New York, 1980.
- [Bu-Gi] K. Burns; M. Gidea. *Differential geometry and topology*. With a view to dynamical systems. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC 2005.
- [Ch] F. Chamizo. Seminario 2001 (una odisea en el espacio-tiempo). Disponible en formato PDF en la página web www.uam.es/fernando.chamizo/seminario.html, 2002.
- [Di] A. Díaz. Introducción a las variedades diferenciables. Disponible en formato PDF en la página web www.uam.es/diaz.miranda, 2003.
- [Do-He] J.R. Dorronsoro, E. Hernández. *Numeros Grupos y Anillos* Addison-Wesley Iberoamericana–UAM, Madrid, 1996.
- [Fe-Le-Sa] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands. *Feynman Física*, V. II. Fondo educativo interamericano 1972.
- [Ga-Ru] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz. *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*, 2ª edición. Editorial Sanz y Torres, Madrid, 2005.
- [GoG] G. González. *Geometría IV (notas provisionales del curso 2005/06)*. Disponible en www.uam.es/gabino.gonzalez/notas2006.pdf, 2006.
- [GoJ] J. Gonzalo. *Variedades y Geometría: un curso breve*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2005.
- [Gr-Ha] M.J. Greenberg, J.R. Harper. *Algebraic topology. A first course*. Benjamin/Cummings, 1981.
- [Hi] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, 1976.

- [Ja] K. Jänich. *Vector analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Ko] C. Kosniowski. *A first course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 1980.
- [Ku] A.C. Kurosch. *Curso de álgebra superior*. Segunda edición. Mir, Moscú, 1975.
- [Mu] J.R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [ON] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., New York, 1983.
- [Sp1] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [Sp1t2] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [Sp2] M. Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverté, Barcelona, 1982.
- [Wa] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer Verlag, 1983.

Índice alfabético

- Alexander, J.W. (1888–1971), 50
álgebra exterior, 20
aplicación de Gauss, 85
aplicación exponencial, 82
aplicación tangente, 13
atlas orientado, 34
- banda de Möbius, 37
base dual, 2
Betti, E. (1823–1892), 50
Bianchi, identidad de, 90
bola de pelo, Teorema de la, 59
borde, 41
braquistocrona, 68
Brouwer, Teorema del punto fijo de, 58
- cálculo de variaciones, 68
campo de vectores, 15
campo tensorial, 15
carta, 9
Cartan, É. (1869–1951), 20, 23
cartas compatibles, 9
cohomología de de Rham, grupo de, 50
compacidad, 49
componentes de un tensor, 4
conexión, 49
conexión de Koszul, 77
contracción, 6
contractible a un punto, 47
contravector, 4
convenio de sumación de Einstein, 5
coordenadas generalizadas, 68
covector, 14
curvatura de Gauss, 85
curvatura escalar, 88
curvatura, tensor de, 87
- de Rham, G. (1903–1990), 50
delta de Kronecker, 7
derivación, 11
derivada covariante, 78
derivada covariante a lo largo de una curva, 79
derivada exterior, 25
difeomorfismo, 10
- elemento de volumen, 66
esferas exóticas, 9
espacio cotangente, 14
espacio dual, 2
espacio euclídeo, 6
espacio tangente, 11
estructura diferenciable, 9
Euler, fórmula de, 54
Euler-Lagrange, ecuaciones de, 68
- fibrado tangente, 15
forma alternada, 20
forma de volumen, 38
forma diferencial, 20
forma diferencial cerrada, 46
forma diferencial exacta, 46
Freedman, M. (1951–), 60
funciones coordenadas, 9
- Gauss, C.F. (1777–1855), 85
Gauss, teorema de la divergencia de, 45
Gauss-Bonnet, teorema de, 85
geodésica, 71

- germen de función, 11
 gradiente, 19
 Grassman, H. (1809–1877), 20, 23
 Green, teorema de, 44
 grupo fundamental, 54

 Heine-Borel, teorema de, 49
 homología, grupos de, 50
 homomorfismo de conexión, 56
 homotopía, 47, 52
 Hopf-Rinow, teorema de, 82
 Hurewicz, W. (1904–1956), 59

 imagen recíproca, 32
 inmersión, 64
 integración en curvas y superficies, 36
 integración en variedades, 35

 Lema de Poincaré, 47
 longitud de arco, 73

 Mayer-Vietoris, sucesión de, 55
 métrica, 16
 métrica de Minkowski, 7
 métrica inducida, 64
 métrica usual, 64, 65
 Milnor, J. (1931–), 9
 Minkowski, H. (1864–1909), 6
 multilineal, aplicación, 2

 número de Betti, 51
 Nash, J. (1928–), 8

 orden de conexión, 50
 orientación, 34
 orientación inducida, 42

 particiones de la unidad, 34
 Perelman, G. (1966–), 60
 Poincaré, Conjetura de, 60
 Poincaré, H. (1854–1912), 50
 primera forma fundamental, 65
 principio de Arquímedes, 46

 producto exterior, 23, 24
 producto tensorial, 5
 producto vectorial, 24, 28, 29
 pullback, 32

 regla de la mano derecha, 37, 43
 regla del sacacorchos, 43
 retracto, 52
 Ricci, lema de, 80
 Riemann, B. (1826–1866), 87

 símbolos de Christoffel, 70
 Smale, S. (1930–), 60
 snake lemma, 56
 Stokes, G. (1819–1903), 40
 Stokes, teorema de, 43, 45
 sucesión exacta, 54
 sucesión exacta corta, 55
 superconmutatividad, 23

 tensor, 3, 15
 tensor de Ricci, 88
 tensor de Ricci contravariante, 88
 tensor de Riemann, 87
 tensor simétrico, 20
 tensorialidad, 18
 Teorema Egregio, 86
 teorema fundamental del cálculo, 40
 tipo de homotopía, 52
 tipo de un tensor, 3
 transporte paralelo, 79

 uno forma, 14, 21

 variedad con borde, 41
 variedad de tipo finito, 51
 variedad diferenciable, 10
 variedad riemanniana, 63
 variedad semiriemanniana, 63
 vector tangente, 11
 volumen n -dimensional, 66

 Whitney, H. (1907–1989), 8