Soluciones del examen parcial del 22/05/2008

1. El lagrangiano es $\mathcal{L} = \dot{x}^2 + e^{x-2y}\dot{y}^2$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\big(2\dot{x}\big) = e^{x-2y}\dot{y}^2 \;\Rightarrow\; 2\ddot{x} = e^{x-2y}\dot{y}^2$$

y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\big(2e^{x-2y}\dot{y}\big) = -2e^{x-2y}\dot{y}^2 \;\Rightarrow\; 2e^{x-2y}(\dot{x}-2\dot{y})\dot{y}+2e^{x-2y}\ddot{y} = -2e^{x-2y}\dot{y}^2.$$

Simplificando se obtiene

$$\ddot{x} - \frac{1}{2}e^{x-2y}\dot{y}^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2 = 0.$$

2. Tomando cohomologías se debería tener el esquema:

$$H^1(S^1) \xrightarrow{f^*} H^1(\overline{D}) \xrightarrow{i^*} H^1(S^1)$$

donde la composición $i^* \circ f^*$ es la identidad (porque $f \circ i$ lo es).

El disco $\overline{D}$ es contractible y por tanto $H^1(\overline{D}) \cong \{0\}$. Por otro lado $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ y el esquema

$$\mathbb{R} \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

lleva a una contradicción si queremos que la composición sea la identidad: la primera aplicación no es inyectiva.

3. a) Sabemos que $H^2(S^2) \cong \mathbb{R}$ y por definición este espacio vectorial es el espacio cociente de las 2-formas cerradas entre la exactas, por tanto si no es trivial deben existir 2-formas cerradas no exactas.

b) En $-(1 - r_0/r)\dot{t}^2 + c^{-2}(1 - r_0/r)^{-1}\dot{r}^2 = -1$ sustituimos $r = 4r_0/3$ y $\dot{r} = 3c/8$, obteniéndose $-\dot{t}^2/4 + 4c^{-2}(3c/8)^2 = -1$ y despejando $\dot{t} = \pm 5/2$ (en relatividad se suele definir el tiempo propio de forma que $\dot{t} > 0$).

c) Sí, porque la primera de las ecuaciones de Euler-Lagrange afirma $\frac{d}{dt}(2f(y)\dot{x}) = 0$ y entonces $2f(y)\dot{x}$ es constante.

Soluciones del examen parcial del 27/05/2008

1. Se tiene $N := \mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ donde $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 - \{p_1\}$ y $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2 - \{p_2\}$ (Nota: también se puede usar la unión con trozos adecuados) y $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = \mathbb{R}^2$. La sucesión de Mayer-Vietoris correspondiente a $M = \mathbb{R}^2$ es

$$
\begin{aligned}
0 \quad \longrightarrow \quad & H^0(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}) \oplus H^0(\mathcal{V}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}) \oplus H^1(\mathcal{V}) \\
\longrightarrow \quad & H^1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow H^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}) \oplus H^2(\mathcal{V}) \longrightarrow H^2(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

Los abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son homótopos a S^1 y entonces $H^k(\mathcal{U}) \cong H^k(\mathcal{V}) \cong \mathbb{R}$ para $k = 0, 1$ y son $\cong \{0\}$ en otro caso. De esto último los tres últimos términos de la sucesión exacta dan $H^2(N) \cong \{0\}$. Aplicando la fórmula de las dimensiones al resto usando que $H^2(N) \cong \mathbb{R}$ (por ser conexo por arcos) y que como $\mathbb{R}^2$ es contractible, $H^1(\mathbb{R}^2) \cong H^2(\mathbb{R}^2) \cong \{0\}$ y $H^0(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}$, se obtiene $-1 + 2 - 1 + 0 - 2 + \dim H^1(N) - 0 = 0$. De aquí $H^1(N) \cong \mathbb{R}^2$.

2. El lagrangiano es $\mathcal{L} = f(x)\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ y la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a x es

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\big(2f(x)\dot{x}\big) = f'(x)\dot{x}^2 \;\Rightarrow\; 2fx)\dot{x}^2 + 2f(x)\ddot{x} = f'(x)\dot{x}^2.
$$

De aquí $\ddot{x} + f'(x)\dot{x}^2/2f(x) = 0$ y por tanto $\Gamma^1_{11} = f'(x)/2f(x)$. La función más obvia que resuelve $f'(x) = 2f(x)$ es $f(x) = e^{2x}$.

3. a) Sí. $H^2(S^2)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 1 porque $H^2(S^2) \cong \mathbb{R}$, entonces las bases tienen un elemento y cualquier vector no nulo constituye una base.

b) La primera de las ecuaciones de Euler-Lagrange afirma que $\frac{d}{dt}\big(-2(1 - r_0/r)\dot{t}\big) = 0$, por tanto $-2(1 - r_0/r)\dot{t}$ permanece constante.

c) La simetría de los símbolos de Christoffel es $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ y en dimensión 3, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Por tanto hay 3 posibilidades para k y $\mathrm{CR}^2_3 = \binom{3+2-1}{2} = 6$ posibilidades esencialmente distintas para ij, o si uno lo prefiere $\binom{3}{2} + 3$. En total hay $18 = 3 \cdot 6$ formas de combinarlas.