Soluciones del examen parcial del 8/04/2008

1. i) Derivando el producto exterior $d(\omega\wedge d\eta) = d\omega\wedge d\eta + (-1)^1\omega\wedge d(d\eta) = d\omega\wedge d\eta$ y $d(d\omega\wedge\eta) = d(d\omega)\wedge\eta + (-1)^2 d\omega\wedge d\eta = d\omega\wedge d\eta$, porque $\omega\in\Omega^1(M)$ y $d\omega\in\Omega^2(M)$. Entonces son iguales.

ii) Una carta en S^2 tiene dos funciones coordenadas ($\dim S^2 = 2$), así pues hay tantas componentes $T^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_s}$ como posibilidades de elegir los i_k y los j_l en el conjunto $\{1,2\}$, esto es, $2^r\cdot 2^s = 2^{r+s}$.

iii) $\omega\wedge\omega = (-1)^{1\cdot 1}\omega\wedge\omega$ por la anticonmutativa, en particular $\omega\wedge\omega = 0$ y de aquí $\omega\wedge\omega\wedge\omega = 0$.

2. Si llamamos T^i_j y $\widetilde{T}^i_j$ a las componentes de T con la carta trivial y con la nueva carta, respectivamente, el enunciado pide hallar $\widetilde{T}^1_1 + \widetilde{T}^2_2 = \widetilde{T}^i_i$ lo cual es una constante en cada punto, independiente de la carta, por corresponder a un tensor de tipo $(0,0)$. Entonces $\widetilde{T}^i_i = T^i_i = T\big(dx, \frac{\partial}{\partial x}\big) + T\big(dy, \frac{\partial}{\partial y}\big) = 1 + 0 = 1$.

3. Parametrizamos $x = \cos t$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t$, $0\le t\le\pi$, y se tiene

$$\int_M \omega = \int_0^\pi \left((\cos t e^1 + 1)(-\operatorname{sen} t) + \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t\frac{\cos t}{\sqrt{2}}e^1 \right) dt = \int_0^\pi (-\operatorname{sen} t)\, dt = -2.$$

Sea S la semicircunferencia, la curva $S\cup M$ es el borde de una región en $\mathbb{R}^2$. Como $d\big((xe^{x^2+2y^2}+1)\,dx + 2ye^{x^2+2y^2}\,dy\big) = 4xye^{x^2+2y^2}(dy\wedge dx + dx\wedge dy) = 0$, por el teorema de Stokes $\int_{S\cup M}\omega = 0$, entonces $\int_S\omega + \int_M\omega = 0$ y de aquí $\int_S\omega = 2$.