Geometría IV

Examen parcial 8/04/2008

1. Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Se cumple $d\big(\omega \wedge d\eta\big) = d\big(d\omega \wedge \eta\big)$ para $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$?

ii) ¿Cuántas componentes tiene un tensor de tipo (r, s) definido en S^2?

iii) ¿Es cierto que todas las uno formas satisfacen $\omega \wedge \omega \wedge \omega = 0$?

2. Sea en $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ el tensor T que con la carta trivial es $\dfrac{\partial}{\partial x} \otimes dx$. Supongamos que $\big(M, \phi = (a, b)\big)$ es otra carta. Calcular $T\big(da, \frac{\partial}{\partial a}\big) + T\big(db, \frac{\partial}{\partial b}\big)$.

3. Considérese la semielipse $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 = 1, \ y \geq 0\}$ y la forma diferencial $\omega = j^*\big((xe^{x^2+2y^2} + 1)\, dx + 2ye^{x^2+2y^2}\, dy\big)$ donde $j : M \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ es la inclusión. Eligiendo alguna orientación, calcular $\int_M \omega$. Hallar también el valor de esta integral cuando M se cambia por la semicircunferencia $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1, \ y \leq 0\}$.

Duración: Una hora.
Puntuación: $(1 + 1 + 1) + 3 + 4$.