Soluciones del parcial del examen final del 7/6/2007

1. a) Sabemos que $d(F^*\omega) = F^*d\omega$ y un cálculo sencillo prueba que $d\omega = 0$, entonces $F^*\omega$ es cerraday por tanto también exacta porque $\mathbb{R}^2$ es contractible.

b) Una métrica diagonal, como por ejemplo la usual en $\mathbb{R}^n$, tiene $n^2 - n$ componentes nulas. Si hubiera más, alguna fila de la matriz (g_{ij}) sería nula, lo que contradice la definición de métrica, en la que se pide que esta matriz sea no singular.

2. A partir de $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

Despejando, se deduce

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

mientras que por otro lado $dy = \operatorname{sen}\theta\; dr + r\cos\theta\; d\theta$. Así pues

$$T = \big(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\big) \otimes \big(\operatorname{sen}\theta\; dr + r\cos\theta\; d\theta\big)$$

entonces las componentes en polares son

$$T_1^1 = T\big(dr, \tfrac{\partial}{\partial r}\big) = \cos\theta\operatorname{sen}\theta, \qquad T_2^1 = T\big(dr, \tfrac{\partial}{\partial \theta}\big) = r\cos^2\theta,$$

$$T_1^2 = T\big(d\theta, \tfrac{\partial}{\partial r}\big) = -r^{-1}\operatorname{sen}\theta, \qquad T_2^1 = T\big(d\theta, \tfrac{\partial}{\partial \theta}\big) = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

3. Sea la variedad con borde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x-1)^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\; x^2 + y^2 + z^2 \ge 1\}$. Se tiene $\partial M = S \cup S^2$ con S^2 la superficie esférica unidad. Por el teorema de Stokes, con una orientación adecuada

$$\int_M d\omega = \int_{S\cup S^2} j^*\omega = \int_S j^*\omega + \int_{S^2} j^*\omega.$$

Sabemos que $d\omega = 0$ y evidentemente $\int_{S^2} j^*\omega$ no depende de R, entonces $\int_S j^*\omega$ (que es su negativo) tampoco.

4. El lagrangiano correspondiente es $\mathcal{L} = y^{-2}\dot{x}^2 + y^{-2}\dot{y}^2$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(2y^{-2}\dot{x}) = -4y^{-3}\dot{y}\dot{x} + 2y^{-2}\ddot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}(2y^{-2}\dot{y}) = -4y^{-3}\dot{y}^2 + 2y^{-2}\ddot{y}, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = -2y^{-3}\dot{x}^2 - 2y^{-3}\dot{y}^2.$$

De aquí se deduce

$$\begin{cases} x'' - 2y^{-1}y'x' = 0 \\ y'' + y^{-1}(x')^2 - y^{-1}(y')^2 = 0. \end{cases}$$

5. Restando se tiene $\nabla_1(\partial_2) = 0$ y de ahí $\nabla_1(\partial_1) = \partial_1$. Por definición $\nabla_j\vec{V} = V^k_{;j}\partial_k = (V^k_{,j} + \Gamma^k_{lj}V^l)\partial_k$, entonces $\nabla_j(\partial_i) = \Gamma^k_{ij}\partial_k$. De $\nabla_1(\partial_1) = \partial_1$, $\nabla_1(\partial_2) = \nabla_2(\partial_2) = 0$ se deduce que $\Gamma^1_{11} = 1$ y el resto de los símbolos de Christoffel son nulos

Las ecuaciones de las geodésicas son $\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$. En nuestro caso se reducen a $x'' + (x')^2 = 0$, $y'' = 0$ y la curva dada satisface estas ecuaciones.

6. a) No, por ejemplo al intercambiar las dos variables el resultado cambia de signo (aplicando las fórmulas para cambiar de carta tensores se tiene $\widetilde{V}^1_{;1} = V^2_{;2}$, etc.).

b) No, por ejemplo $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ define una función inyectiva $f : (-1,1) \longrightarrow S^1$ pero $f^* : H^1(S^1) \longrightarrow H^1\big((-1,1)\big)$ no puede ser inyectiva ya que $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ y $H^1\big((-1,1)\big) \cong \{0\}$.