Geometría IV

Examen final 7 de junio de 2007

1. Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Sean $\omega = (f(x) + y)dx + (g(y) + x)dy$ y $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, ¿es $F^*\omega$ necesariamente exacta?

b) ¿Cuál es el número máximo de componentes nulas que puede tener una métrica en una variedad de dimensión n?

2. Hallar todas las componentes del tensor $T = \dfrac{\partial}{\partial x} \otimes dy$ en $\mathbb{R}^2$ cuando se emplean coordenadas polares.

3. Sea la subvariedad de $\mathbb{R}^3$ dada por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ con $R > 3$ y sea $\omega = (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)/\|\vec{x}\|^3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\})$, $\vec{x} = (x, y, z)$. Demostrar que si $j : S \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ es la inclusión, $\int_S j^*\omega$ es constante, no depende de R. *Indicación*: Se puede dar por supuesto $d\omega = 0$.

4. Calcular las ecuaciones que definen las geodésicas en el semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la métrica $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$.

5. Supongamos en $\mathbb{R}^2$ una métrica tal que se cumple $\nabla_1(\partial_1 + 2\partial_2) = \nabla_1(\partial_1 + \partial_2) = \partial_1$ y $\nabla_2(\partial_2) = 0$. Hallar los símbolos de Christoffel y estudiar si la curva $(x(t), y(t)) = (\log(t+1), 0)$ es una geodésica.

6. Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si V y W son dos campos de vectores en $\mathbb{R}^2$, ¿es $V^1_{;1}W^1_{;1} - V^2_{;2}W^2_{;2}$ independiente de la carta elegida?

b) Si f es una función inyectiva entre variedades, ¿es siempre f^* una aplicación inyectiva entre los grupos de cohomología H^1?

Nota: La distribución de la puntuación es $(1+1) + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + (1+1)$.