Soluciones del parcial del 28/05/2007

1. Sea m_1 y m_2 dos meridianos distintos de $\mathbb{T}^2$, entonces los "cilindros curvados" $\mathcal{U} = \mathbb{T}^2 - m_1$ y $\mathcal{V} = \mathbb{T}^2 - m_2$ son difeomorfos a $S^1 \times \mathbb{R}$ y lo mismo ocurre con cada una de las dos componentes conexas de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Como $M \times \mathbb{R}$ es homótopo a M (visto en clase: $H(x, u, t) = (x, (1-t)u)$ es la homotopía que aplasta $M \times \mathbb{R}$ en $M \times \{0\}$ que es difeomorfa a M), se tiene

$$H^k(\mathcal{U}) \cong H^k(\mathcal{V}) \cong H^k(S^1) \qquad \text{y} \qquad H^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cong H^k(S^1) \oplus H^k(S^1).$$

Sabemos que $H^k(S^1) \cong \mathbb{R}$ si $k = 0, 1$ y es trivial en otro caso, entonces la sucesión de Mayer-Vietoris es, salvo isomorfismos,

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H^2(\mathbb{T}^2) \longrightarrow 0.$$

Por ser $\mathbb{T}^2$ conexo, $H^0(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$ y por ser además compacto y orientable de dimensión dos, $H^2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$. Utilizando la fórmula $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$ para sucesiones exactas de espacios vectoriales, se tiene $-1 + 2 - 2 + \dim H^1(\mathbb{T}^2) - 2 + 2 - 1 = 0$ y por tanto $H^1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}^2$.

2. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$$

con $\mathcal{L} = \dot{x}^2 + x^2 \dot{y}^2$. Los cálculos correspondientes,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 2\ddot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x\dot{y}^2, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}(2x^2\dot{y}) = 4x\dot{x}\dot{y} + 2x^2\ddot{y}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0,$$

conducen a

$$\begin{cases} x'' - x(y')^2 = 0 \\ y'' + 2x^{-1}x'y' = 0. \end{cases}$$

3. a) $V^k_{;k}$ es un tensor de tipo $(0,0)$, la contracción de un tensor de tipo $(1,1)$, por tanto es una función (en cada punto es una constante) y entonces en coordenadas polares es simplemente $r\cos\theta$, es decir x expresado en esas coordenadas.

b) No, por ejemplo $H^k(\mathbb{R})$ y $H^k(\mathbb{R}^2)$ son ambos triviales para $k \geq 1$ e isomorfos a $\mathbb{R}$ para $k = 0$.

c) No, por ejemplo tomando $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\omega = y\,dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ con $f(t) = (t, t)$, se tiene $f^*\omega = t\,dt \in \Omega^1(\mathbb{R})$ que es exacta mientras que ω no lo es ($d\omega = dy \wedge dx$).