# Geometría IV

Segunda parte 28 de mayo de 2007

**1.** (3 puntos) Calcular $H^1(\mathbb{T}^2)$ donde $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es el toro usual. *Indicación*: $\mathbb{T}^2$ es la unión de dos cilindros curvados.

**2.** (3 puntos) Escribir las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas en la variedad $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ con la métrica $dx \otimes dx + x^2 dy \otimes dy$.

**3.** Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

(1,5 puntos) a) Si $V$ es un campo de vectores en $\mathbb{R}^2$ tal que en coordenadas cartesianas $V^1_{;1} + V^2_{;2} = x$, ¿cuánto vale $V^1_{;1} + V^2_{;2}$ en coordenadas polares?

(1,25 puntos) b) Si dos variedades $M$ y $N$ cumplen $H^k(M) \cong H^k(N)$ para todo $k$, ¿deben coincidir las dimensiones de $M$ y $N$?

(1,25 puntos) c) Sean $f : M \longrightarrow N$ y $\omega \in \Omega^k(N)$ tales que $f^*\omega$ es cerrada y no idénticamente nula, ¿es necesariamente $\omega$ cerrada?