Soluciones del parcial del 22/03/2007

1. a) No. Si $\{\widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2\}$ es la base dual de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ entonces $(\widetilde{\varphi}^1 \otimes \widetilde{\varphi}^2)(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1 \cdot 1$ mientras que $(\widetilde{\varphi}^2 \otimes \widetilde{\varphi}^1)(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 \cdot 0$.

b) Sí. Si $\{\widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2, \widetilde{\varphi}^3\}$ es la base dual de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, $\omega = \widetilde{\varphi}^1 \wedge \widetilde{\varphi}^3 = \widetilde{\varphi}^1 \otimes \widetilde{\varphi}^3 - \widetilde{\varphi}^3 \otimes \widetilde{\varphi}^1$ tiene esta propiedad.

c) Es cero. El *pullback* f^* conmuta con d y $f^*\alpha \wedge f^*\beta = f^*(\alpha \wedge \beta)$, así que la expresión es $f^*\big(d(d\omega \wedge \eta) + d(d\eta \wedge \omega)\big)$. Usando la regla del producto y $d \circ d = 0$, la parte interior se simplifica a $(-1)^{2k+2} d\omega \wedge d\eta + (-1)^{2k+1} d\eta \wedge d\omega = (-1)^{2k+2} d\omega \wedge d\eta + (-1)^{2k+1} d\omega \wedge d\eta = 0$ donde se ha usado que $d\eta \wedge d\omega = d\omega \wedge d\eta$ porque $d\omega$ tiene grado par.

2. a) Con la carta en S^1 dada por el ángulo, $j \circ \phi^{-1}$ es $\theta \mapsto (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} j^*\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\big(2\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{1}\big)(-\operatorname{sen}\theta) + \frac{1+\cos\theta}{1}\cos\theta \right) d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1)\, d\theta = \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \theta\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

b) Si $\omega = d\eta$, entonces $j^*\omega = d(j^*\eta)$ y aplicando el teorema de Stokes la integral de a) sería $\int_{S^1} d(j^*\eta) = \int_{\partial S^1} i^*(j^*\omega) = 0$ porque $\partial S^1 = \emptyset$.

3. Sean T'_{ij} las componentes en la nueva carta. Según las fórmulas de cambio de carta

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T_{kl}, \qquad \text{equivalentemente} \qquad T'_{ji} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i} T_{kl}$$

Los índices k y l son mudos, indican las sumaciones. Podemos intercambiar sus nombres en la primera fórmula y escribir:

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j} T_{lk} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i} T_{kl} = T'_{ji}$$

donde se ha usado la simetría $T_{lk} = T_{kl}$ en la segunda igualdad.

4. No. Por ejemplo $dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ es invariante si $f(x,y,z) = (2x, y/2, z)$ porque $f^*\omega = d(2x) \wedge d(y/2) \wedge dz$.

Algunos comentarios a la vuelta

Comentarios sobre las respuestas en los exámenes

1. a) No es válido decir que es conmutativo porque a fin de cuentas es un producto de números una vez que aplicamos el tensor a vectores. El orden de estos vectores es relevante y no se puede cambiar arbitrariamente.

b) Si tenemos k vectores linealmente dependientes, al aplicarles una k-forma alternada el resultado es cero, pero el recíproco no es cierto.

c) Parece un error bastante generalizado pensar que $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. Tal cosa no es siempre cierta, por ejemplo si $\alpha = dx$ y $\beta = dy \wedge dz$ entonces $\alpha \wedge \beta = dx \wedge dy \wedge dz = dy \wedge dz \wedge dx = \beta \wedge \alpha$. La fórmula general (p. 24 de los apuntes) es $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$ donde k y l son los grados de α y β.

2. a) Hay cierta extraña epidemia consistente en tener problemas con las integrales $\int_{-\pi}^{\pi} 2 \operatorname{sen} t \cos t \; dt$ y $\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \; dt$. La primera es inmediata (aparte de que es fácil ver que da cero sin integrar) y la segunda trivial.

b) El teorema de Stokes dice $\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega$ con $i : \partial M \longrightarrow M$. No es correcto intercambiar $d\omega$ y ω, ni M y ∂M, ni tampoco sustituir i por la inclusión entre otras cosas que no sean ∂M y M. Todos estos cambios llevan a expresiones sin sentido.

3. Varios escriben los cálculos detallados, con todas las sumas, en el caso de dimensión dos y dicen que el caso general es similar (o no lo dicen). De acuerdo, es esencialmente correcto, pero con las fórmulas vistas en clase (que involucraban el convenio de sumación) el caso general es mucho más sencillo y breve que estos cálculos.

4. Pocos han conseguido resolver este ejercicio a pesar de tener una solución sencilla. Es cierto que no tenía un análogo en las colecciones de ejercicios y además parece que la falta de tiempo fue general. No obstante sugiero repasar la definición de *pullback*.