Geometría IV

Primera parte 22 de marzo de 2007

1. Responder brevemente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es el producto tensorial de tensores covariantes conmutativo?

b) Si $\omega \in \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ no es idénticamente nula ¿puede cumplirse $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = \omega(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ para tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, linealmente independientes?

c) Si $\omega \in \Omega^{2k+1}(M)$, $\eta \in \Omega^{2k}(M)$ y $f : N \longrightarrow M$, ¿cómo se puede simplificar la expresión $f^*d(d\omega \wedge \eta) + d\big((f^*d\eta) \wedge f^*\omega\big)$?

2. Sea

$$\omega = \left(2x - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2}\, dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}).$$

a) Calcular $\int_{S^1} j^*\omega$ con alguna de las dos orientaciones de S^1, donde $j : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la inclusión.

b) Probar que no existe ninguna 0-forma (función), η, en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ con $d\eta = \omega$. *Indicación*: Se puede emplear el Teorema de Stokes.

3. Demostrar que si las componentes T_{ij} de un campo tensorial de tipo $(0,2)$ son simétricas (cumplen $T_{ij} = T_{ji}$) empleando una carta $(\mathcal{U}, \phi)$, entonces también lo son (en $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$) empleando cualquier otra carta compatible $(\mathcal{V}, \psi)$.

4. Supongamos que para cierta $\omega \in \Omega^3(M)$ no idénticamente nula existe una función $f : M \longrightarrow M$ tal que $f^*\omega = \omega$. ¿Es necesariamente f la función identidad?