Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si los coeficientes del tensor métrico son constantes, ¿a qué es igual la derivada covariante?

ii) Si multiplicamos la métrica por una constante no nula, ¿qué ocurre con la derivada covariante?

iii) Si V es un campo de vectores y f una función escalar, ¿cuál es la derivada covariante de fV?

iv) Si $\nabla V = \nabla W = 0$, ¿es $G(V, W)$ constante?

2) Si C es la matriz $(V^i_{;j})$ con V un campo en $\mathbb{R}^2$ (con la métrica usual) cuando se usan coordenadas cartesianas y P es la matriz correspondiente cuando se emplean coordenadas polares, demostrar la relación:

$$J^{-1}CJ = P \qquad \text{con} \qquad J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3) Sea el campo en $\mathbb{R}^2$ que en coordenadas polares viene dado por $V = \partial/\partial\theta$. Calcular su derivada covariante y comprobar la relación del problema anterior.

4) Supongamos que se tiene una métrica en $\mathbb{R}$ (con la carta trivial) tal que $\nabla_1 V = 2007$ para $V = \partial_1$.

a) Demostrar que el transporte paralelo de $V_0 = \partial_1$ desde $x = 0$ a $x = t$ a lo largo de la recta que une estos puntos es $e^{-2007t}\partial_1$. En particular, la derivada covariante de $V = e^{-2007x}\partial_1$ es nula.

b) Hallar todas las posibles métricas en $\mathbb{R}$ para las que la derivada covariante responde a esta fórmula.

5) Sea $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la métrica $G = y^{-2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$. Calcular la derivada covariante de $V = f(y)\partial/\partial x$. Hallar f para que la derivada covariante a lo largo de la semirrecta $x = 0$, $y = t > 1$ sea nula.

6) Comprobar la relación $\nabla(S \otimes T) = (\nabla S) \otimes T + S \otimes \nabla T$ cuando S y T son campos vectoriales o de uno formas.

7) Probar la fórmula $\dfrac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \dfrac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \dfrac{DW}{dt}\rangle$.

8) Consideremos una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ (con la métrica inducida). Probar que si $V(p)$ se transporta paralelamente en $V(q)$ y $W(p)$ se transporta paralelamente en $W(q)$ a lo largo de cierta curva conectando p y q, entonces intepretando V y W como vectores en $\mathbb{R}^n$ se cumple $\|V(p)\| = \|V(q)\|$, $\|W(p)\| = \|W(q)\|$ y $\angle(V(p), W(p)) = \angle(V(q), W(q))$ donde $\angle$ indica el ángulo.

9) Sean dos superficies $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ con la métrica inducida que son tangentes a lo largo de una curva. Probar que el transporte paralelo por ella es igual tanto si se lleva a cabo por S_1 como si se lleva a cabo por S_2.