Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Comprobar que para definir la circunferencia unidad bastan dos cartas. Utilícese un argumento topológico para probar que una no es suficiente.

2) En la superficie esférica unidad en $\mathbb{R}^3$, $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2=1\}$ considérense las cartas $(S^2 - \{\mathrm{N}\}, \phi_{\mathrm{N}})$ y $(S^2 - \{\mathrm{S}\}, \phi_{\mathrm{S}})$ que dan las proyecciones estereográficas en $z=0$ desde los polos norte N y sur S respectivamente.

a) Hallar una fórmula para ϕ_{N} y ϕ_{S}.

b) Demostrar que son cartas compatibles.

3) Estudiar si con la estructura de variedad correspondiente a las cartas del problema anterior las funciones $f_1, f_2 : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x,y,z) = |z-1|$ y $f_2(x,y,z) = |x|$ son C^∞.

4) Sea $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por un giro de ángulo α. Describir el efecto de la aplicación tangente sobre ∂_1 en los siguientes casos:

a) En ambas circunferencias se emplea la carta $(S^2 - \{(-1,0)\}, \phi_1)$ donde ϕ_1 asigna a cada puntoel ángulo que determina con OX, normalizado en $(-\pi, \pi)$.

b) En la primera se emplea $(S^2 - \{(-1,0)\}, \phi_1)$ y en la segunda $(S^2 \cap \{x > 0\}, \phi_2)$ con $\phi_2(x,y) = y$.

5) Comprobar usando las definiciones dadas en la sección que realmente

$$dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right) = \delta^i_j.$$

¿Cómo se deduce de aquí que los $dx^i|_p$ son linealmente independientes? ¿Y que todo elemento de $T_p^*(M)$ es una combinación lineal de los $dx^i|_p$?

6) Demostrar que una variedad unidimensional no es bidimensional, en el sentido de que no puede existir una carta bidimensional compatible con una unidimensional. Nota: Naturalmente esto es cierto en general pero no es fácil de probar.