Problemas de la hoja 3 de E.D.O. resueltos el 17/11/05 y algunos más

1. a) $W' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_2''y_1 - y_1''y_2$. Utilizando la ecuación

$$W' = (-Py_2' - Qy_2)y_1 - (-Py_1' - Qy_1)y_2 = P(y_1y_2' - y_1'y_2) = -Pw.$$

b) $W'/W = -P \;\Rightarrow\; W = \text{cte} \cdot e^{-\int P}$ que se anula sólo si la constante es nula.

2. Porque al despejar y'' los coeficientes no son continuos en un entorno de cero.

3. a) Escribiendo $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $\vec{Y} = (y_1, y_2)^t$, el sistema es

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -by_1 - ay_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \vec{Y}.$$

El polinomio característico de la matriz es $(-\lambda)(-a-\lambda) + b = \lambda^2 + a\lambda + b$.

b) Pol. caráct. ec.$= (-1)^n$Pol. caráct. matriz. Se puede hacer una prueba por inducción (no es inmediata, se deja como ejercicio).

5. a) Digamos $x_1(a) = x_2(a) = 0$. Sean cuales sean $x_1'(a)$, $x_2'(a)$; siempre se pueden escoger μ, λ no simultáneamente nulos tales que $\lambda x_1'(a) + \mu x_2'(a) = 0$. Entonces la función $x = \lambda x_1' + \mu x_2'$ satisface la ecuación con las condiciones $x(a) = x'(a) = 0$. Por la unicidad debe ser la función idénticamente nula.

b) Lo mismo que en el apartado anterior pero ahora $x_1'(a) = x_2'(a) = 0$ y se escogen μ, λ tales que $\lambda x_1(a) + \mu x_2(a) = 0$.

6. a) Son linealmente independientes porque $W(\cos x - \operatorname{sen} x, 2\operatorname{sen} x) = 2 \neq 0$. Dos vectores independientes en un espacio de dimensión 2, siempre forman una base.

b) Hallando la solución, se tiene $y = \cos x + \operatorname{sen} x$. La expresión $y = 1 \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x) + 1 \cdot (2\operatorname{sen} x)$ implica que las coordenadas son $(1, 1)$.

8. Las raíces del polinomio característico $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ son $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$, por tanto la solución general es $y = Ae^x + Be^{3x}$. Al imponer las condiciones iniciales, $A + B = 6$, $A + 3B = 10$, lo que conduce a la solución $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

9. Por el método con el que hallamos la soluciones, está claro que la solución tiende a cero si y sólo si las raíces de $\lambda^2 + a\lambda + b$ tienen ambas parte real negativa.

Si las raíces son complejas, $\alpha \pm i\beta$, entonces $a = -2\alpha$, $b = \alpha^2 + \beta^2$, por tanto en este caso $\alpha < 0$ equivale a que a y b sean positivos.

Si las raíces son reales, α_1 y α_2, $a = -\alpha_1 - \alpha_2$ y $b = \alpha_1\alpha_2$, por tanto $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ equivale también en este caso a que $a, b > 0$.

10. El polinomio característico es $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$. Como 1 es una raíz triple, la solución general es $y = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x$. Haciendo las cuentas, se obtiene

$$y' = \big(A + B + (B + 2C)x + Cx^2\big)e^x, \qquad y'' = \big(A + 2B + 2C + (B + 4C)x + Cx^2\big)e^x.$$

Al imponer $y(0) = 1$ se tiene $A = 1$, de la misma forma, $y'(0) = 2$ lleva a $B = 1$ e $y''(0) = 3$ a $C = 0$. En definitiva, la solución es $y = (x+1)e^x$.

11. El polinomio es $P = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4$. Si $i - 1$ es raíz, $-i - 1$ también debe serlo, por tanto P es divisible por $(\lambda - (i-1))(\lambda - (-i-1)) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$. Haciendo la división, se obtiene $P = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2$. Entonces las raíces son $-1 \pm i$, cada una de ellas doble, y la solución general es

$$y = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\operatorname{sen} x + Cxe^{-x}\cos x + Dxe^{-x}\operatorname{sen} x.$$

13. La solución general de la homogénea es $y_H = A + Be^x + Cxe^x$ porque las raíces del polinomio característico son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ (doble). El segundo miembro es $x^2 \cdot e^{0\cdot x}$ y como 0 es raíz de multiplicidad uno, por el método de coeficientes indeterminados debemos ensayar soluciones particulares de la forma $y_p = x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$. Sustituyendo

$$6\gamma - 2(2\beta + 6\gamma x) + (\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2) = x^2,$$

que igualando los términos de grados 0, 1 y 2, lleva a $\alpha = 6$, $\beta = 2$ y $\gamma = 1/3$. La solución general es pues

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 6x + A + Be^x + Cxe^x.$$

14. Tras la fórmula trigonométrica $\cos(x+\alpha) = \cos\alpha\cos x - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} x$, se podría aplicar el método de los coeficientes indeterminados en su forma habitual, pero es más cómodo y natural trabajar directamente con $\cos(x+\alpha)$ y $\operatorname{sen}(x+\alpha)$ (a fin de cuentas, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ se pueden obtener como combinaciones lineales de ellos y forman una base de las soluciones de la homogénea). Ensayando con $y_p = Ax\cos(x+\alpha) + Bx\operatorname{sen}(x+\alpha)$,

$$y_p'' + y_p = 2(-A\operatorname{sen}(x+\alpha) + B\cos(x+\alpha))$$

que al igualar a $\cos(x+\alpha)$ implica $A = 0$, $B = 1/2$, que corresponde a la solución particular $y_p = \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(x+\alpha)$.

15. Hacemos el cambio $y = xu$. Derivando $y' = u + xu'$, $y'' = 2u' + xu''$ que al sustituir y simplificar conduce a

$$(2 - 4x^2)u' + (x - x^3)u'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{u''}{u'} = \frac{2 - 4x^2}{x^3 - x}.$$

Descomponiendo en fraciones simples

$$\frac{u''}{u'} = \frac{-2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

que integrando (y eligiendo la constante de integración 0) implica $u' = x^{-2}(x^2-1)^{-1}$. Una nueva descomposición en fracciones simples del segundo miembro e integración con constante nula, lleva a

$$u = -\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Multiplicando esto por x tenemos por tanto una nueva solución, así pues la solución general es

$$y = Ax + B\left(1 + \frac{x}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right).$$

16. Buscamos una segunda solución de la forma t^2u. Sustituyendo en la ecuación, después de algunos cálculos, se deduce $tu'' + 5u' = 0$. Es fácil obtener de aquí la solución $u = t^{-4}$ que corresponde a $x_2(t) = t^{-2}$. La solución general es entonces $x(t) = At^2 + Bt^{-2}$. Las condiciones $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$ implican $A = B = 1$, por tato $x(t) = t^2 + t^{-2}$ es la solución buscada.

17. La solución de la homogénea es $y_H = Ae^x + Be^{2x}$. Por el método de variación de las constantes, para hallar una solución particular resolvemos

$$\begin{cases} A'e^x + B'e^{2x} = 0 \\ A'e^x + B'2e^{2x} = 1/(1+e^{-x}) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema lineal, $A' = -1/(e^x+1)$, $B' = 1/(e^{2x}+e^x)$. Se puede escribir $B' = e^{-x} - 1/(e^x+1)$ y así basta con hallar $\int dx/(e^x+1)$, que se puede calcular con el cambio de variable $e^x = t$. Con ello,

$$A = \log(e^x+1) - x, \qquad B = \log(e^x+1) - x - e^{-x}$$

que corresponde a la solución particular

$$y_p = (\log(e^x+1) - x)e^x + (\log(e^x+1) - x - e^{-x})e^{2x}.$$

La solución general es $y = y_p + y_H$ que operando es

$$y = (A-1)e^x + Be^{2x} + (\log(e^x+1) - x)(e^x + e^{2x}).$$

Obviamente se puede sustituir $A-1$ por A.

18. La solución de la homogénea es $y_H = A\cos x + B\operatorname{sen} x$. Por el método de variación de las constantes, consideramos

$$\begin{cases} A'\cos x + B'\operatorname{sen} x = 0 \\ -A'\operatorname{sen} x + B'\cos x = f(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A' = -f(x)\operatorname{sen} x, \qquad B' = f(x)\cos x.$$

Por tanto la solución particular obtenida es

$$y_p = \cos x\int_0^x f(s)(-\operatorname{sen} s)\,ds + \operatorname{sen} x\int_0^x f(s)\cos s\,ds$$

que usando una sencilla fórmula trigonométrica da la función del enunciado.