Resumen de E.D.O. (2^{o} de Matemáticas)

En estas páginas se enumeran y repasan los contenidos del primer examen. Obviamente un resumen de la teoría, no es un sustituto de ella ni una razón para no realizar problemas. Los ejemplos están tomados de las listas propuestas, indicándose el número de hoja y ejercicio, así 2.3 se refiere al ejercicio 3 de la hoja 2.

Capítulo 1

Después de la motivación física y algunas generalidades, se estudian diferentes métodos para resolver EDO de primer orden. Los principales, con una breve descripción de la idea subyacente, son:

- Variables separables: Transformar la ecuación en una del tipo $f(y)y' = g(x)$, que se integra trivialmente (Ej. 1.5).
- Ecuaciones homogéneas: Sustituyendo y por xz las ecuaciones homogéneas se convierten en ecuaciones de variables separables (Ej. 1.9).
- Ecuaciones exactas y factor integrante: Las ecuaciones de la forma $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$ equivalen a $F(x, y) = \text{cte}$. Si no fueran de esta forma (*exactas*), quizá sí lo sean tras multiplicar por cierta función (*factor integrante*), (Ej. 1.10b, 1.11).
- Ecuaciones lineales: Se pueden ver como un caso especial de factores integrantes (Ej. 1.15).
- Cambio de variable: A veces un cambio de variable permite reducir una ecuación a otra más sencilla (Ej. 1.17, 1.18).

Además de estos métodos, se vio cómo razonamientos geométricos (*isoclinas*) podían dar información cualitativa de interés sobre las soluciones (Ej. 1.1); que algunas ecuaciones de orden dos, o incluso mayor, se reducían al caso de orden uno (Ej. 1.16), y que con una solución es posible a veces calcular otra (Ej. 3.15-16).

A través de sencillos modelos físicos o geométricos, multitud de "problemas con palabras" se reducen a problemas de EDO. En la asignatura Modelización I (y en parte en Geometría II) se profundizará sobre ello, pero ahora hay que saber hacer algunos ejemplos básicos (Ej. 1.4, 1.6, 1.20-21, 1.23).

Capítulo 2

Tiene dos partes bien diferenciadas, de la segunda parte no se comenta aquí lo explicado tras la clase del 23/11/2005, que no es materia del primer examen.

2.A Convergencia puntual y uniforme

Digamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones $f_n = f_n(x)$ definidas en un conjunto A (típicamente un intervalo).

- Convergencia puntual: $f_n \longrightarrow f$ puntualmente, significa que para cualquier *punto* x de A la sucesión de números $f_n(x)$ tiende al número $f(x)$. Es una definición natural pero no muy conveniente para hacer análisis porque no respeta la continuidad (Ej. 2.5) ni permite "tomar límites" bajo integrales (Ej. 2.2) o derivadas.

- Convergencia uniforme: $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, significa intuitivamente que la distancia entre las fráficas de f_n y f tiende a cero. Su gran ventaja es que respeta la continuidad, permite tomar límites bajo integrales (propias) y, con ciertas condiciones (Ej. 2.9), bajo derivadas.

La convergencia puntual o uniforme de series de funciones se reduce a la de sucesiones, porque una serie no es más que la sucesión de sus sumas parciales, aunque hay algunas técnicas que adquieren formas específicas (por ejemplo el test de Weierstrass). En el caso particular de series de potencias (digamos centradas en cero, para simplificar), recordando el Cálculo I se puede ir más allá y probar que existe un *radio de convergencia* R, que es computable con el criterio de la raíz o del cociente (admitimos $R = 0, \infty$), tal que la serie converge en el intervalo $|x| < R$ y diverge en $|x| > R$. El caso $x = \pm R$ hay que tratarlo directamente (Ej. 2.7 a,d,e,f). La convergencia es uniforme en cualquier $[a, b]$ incluido en $|x| < R$.

La convergencia de series de potencias no es ajena a las EDO, en realidad algunas de ellas se resuelven sustituyendo formalmente una serie de potencias y calculando sus coeficientes (Ej. 3.28, 3.29).

Desde el punto de vista topológico, se puede introducir en las funciones continuas $C([a, b])$ la estructura de espacio métrico con la distancia $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. La convergencia en este espacio se traduce en la convergencia uniforme. La convergencia de las sucesiones de Cauchy implica que se cumple el teorema del punto fijo (esto es útil estudiando la existencia y unicidad).

La convergencia uniforme es un concepto delicado e importante. Se aconseja hacer muchos ejercicios. Todos los de la hoja 2 son adecuados, excluyendo, si es necesario, 2.15 y 2.16 que son más avanzados, y 2.13 que es un anticipo de un tema que se tratará con más detalle en EDAF.

2.B Ecuaciones lineales

Tres puntos iniciales importantes son:

- Las EDO lineales de cualquier orden se pueden "reducir" a orden uno si se admiten vectores. Esto es, equivalen a sistemas lineales $\vec{Y}' = A(x)\vec{Y} + \vec{b}(x)$ con $A(x) \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $\vec{b}(x) \in \mathbb{R}^n$, lo cual es una gran ventaja teórica.

- Bajo la hipótesis de continuidad de $A(x)$ y $\vec{b}(x)$, los sistemas lineales tienen solución única cuando se fija una condición inicial $\vec{Y}(x_0) = \vec{Y}_0$.

- En el caso homogéneo ($\vec{b} = \vec{0}$) la solución general (sin imponer un valor inicial) de un sistema lineal da lugar a un espacio vectorial de dimensión n. Esto es, a partir de n soluciones independientes (wronskiano $\neq 0$) se generan todas (Ej. 3.5-6). En el caso no homogéneo el espacio es afín: basta sumar una solución particular al espacio de soluciones de la homogénea.

Para resolver una EDO lineal con coeficientes constantes $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x)$ se siguen los siguientes pasos (Ej. 3.8, 3.10-14, 3.17-18):

- Si r es raíz del polinomio característico $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ entonces e^{rx} es solución de la homogénea, y si r tiene multiciplidad k, $x^j e^{rx}$ también lo es con $j < k$. Con ello se consiguen n soluciones independientes y por tanto la solución general de la homogénea. En el caso de raíces complejas se toman partes reales e imaginarias para presentar la solución en forma real.

- Se halla una solución particular y se suma a la solución general de la homogénea.

Las soluciones particulares de la no homogénea se pueden hallar con dos métodos cuya idea se describe aquí:

- Coeficientes indeterminados: Ajustando combinaciones lineales de funciones sencillas. Sólo es útil si $\vec{b}$ es de cierto tipo.

- Variación de las constantes: Se supone que la solución particular buscada es cierta perturbación de la solución de la homogénea.

Los sistemas homogéneos con coeficientes constantes tienen un tratamiento paralelo al de las ecuaciones. Hay soluciones asociadas a cada raíz (autovalor) λ del polinomio característico. Concretamente son de la forma $e^{\lambda x}\vec{v}$ donde $\vec{v}$ es autovector ($A\vec{v} = \lambda\vec{v}$). Si la matriz no es diagonalizable, se usa la base de Jordan y hay que introducir un factor x en el caso 2×2. El caso complejo no aporta nuevas dificultades. Tomando partes reales e imaginarias se pueden hallar soluciones en forma real.

Los métodos de coeficientes indeterminados y de variación de las constantes también se aplican en el caso de sistemas. El segundo se puede escribir como $\Phi(x)\vec{C}'(x) = \vec{b}(x)$ donde Φ es una matriz fundamental (las columnas son soluciones independientes de la homogénea, su wronskiano es no nulo).

La introducción de exponenciales de matrices permite un atractivo tratamiento sintético de la teoría de sistemas lineales e independiente de la dimensión.

Si es necesario, uno debería repasar algún tema de Álgebra Lineal antes de resolver ejercicios de sistemas (Ej. 3.19-3.24).