E.D.O. 1/12/2005

Apellidos y nombre: ....

.... **DNI o pasaporte:** ....

1. Dado el sistema:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

hállense todas las soluciones $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ para las que $\lim_{x \to +\infty} \vec{Y}(x)$ sea finito.

2. a) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = \frac{nx}{2 + \cos^2(nx) + n|x|}.$$

Estúdiese si converge puntualmente y uniformemente en $\mathbb{R}$ a alguna función.

b) ¿Converge $g_n = f_n/n$ uniformemente a $g = 0$ sobre $\mathbb{R}$?

3. Se quiere diseñar una cúpula de forma que su sección, $y = f(x)$, verifique que los rayos de luz que partan de $(-1, 0)$ pasen siempre por $(1, 0)$ después de reflejarse sobre la gráfica de f. Escríbase razonadamente una ecuación diferencial que deba satisfacer f.

E.D.O. 1/12/2005

Apellidos y nombre: ....

.... **DNI o pasaporte:** ....

1. Hállese la solución general de

$$y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x} + 3.$$

2. Se quiere diseñar una cúpula de forma que su sección, $y = f(x)$, verifique que los rayos de luz que partan de $(-1, 0)$ pasen siempre por $(1, 0)$ después de reflejarse sobre la gráfica de f. Escríbase razonadamente una ecuación diferencial que deba satisfacer f.

3. a) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2}.$$

Estúdiese si converge puntualmente y uniformemente en $\mathbb{R}$ a alguna función.

b) ¿Converge $g_n = \log(f_n)$ uniformemente a $g = 0$ sobre $[1, +\infty)$?

E.D.O. 1/12/2005

Apellidos y nombre:...

..............................**DNI o pasaporte:**...............................

1. a) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + \operatorname{sen}^2(x) + x^{2n}}.$$

Estúdiese si converge puntualmente y uniformemente en $[0, 2]$ a alguna función.

b) ¿Converge $g_n = 1 - f_n$ uniformemente a $g = 0$ sobre $[2, 4]$?

2. Dado el sistema:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

hállense todas las soluciones $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ para las que $\lim_{x \to +\infty} \vec{Y}(x)$ sea finito.

3. Se quiere diseñar una cúpula de forma que su sección, $y = f(x)$, verifique que los rayos de luz que partan de $(-1, 0)$ pasen siempre por $(1, 0)$ después de reflejarse sobre la gráfica de f. Escríbase razonadamente una ecuación diferencial que deba satisfacer f.

E.D.O. 1/12/2005

Apellidos y nombre: ....

.... **DNI o pasaporte:** ....

1. a) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{2 + e^{nx}}.$$

Estúdiese si converge puntualmente y uniformemente en $\mathbb{R}$ a alguna función.

b) ¿Converge $g_n = f_n/n$ uniformemente a $g = 0$ sobre $\mathbb{R}$?

2. Se quiere diseñar una cúpula de forma que su sección, $y = f(x)$, verifique que los rayos de luz que partan de $(-1, 0)$ pasen siempre por $(1, 0)$ después de reflejarse sobre la gráfica de f. Escríbase razonadamente una ecuación diferencial que deba satisfacer f.

3. Hállese la solución general de

$$y'' + y' - 2y = 6e^x + 4.$$

Soluciones del Modelo 1

1. Sabemos que la solución general es de la forma $\vec{Y} = \vec{Y}_H + \vec{Y}_p$ donde $\vec{Y}_H$ es la solución general de la homogénea e $\vec{Y}_p$ es una solución particular. Los autovalores de la matriz del problema vienen dados por

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,$$

de donde $\vec{Y}_H = C_1 e^{-x}\vec{v}_1 + C_2 e^{2x}\vec{v}_2$ con $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ los autovalores correspondientes a $\lambda_1,\ \lambda_2$. La solución particular debe ser de la forma $\vec{Y}_p = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ por la regla de coeficientes indeterminados ($\lambda = 0$ no es autovalor). Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{cases} 5A - 6B - 1 = 0 \\ 3A - 4B - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A = B = -1.$$

La condición $\lim_{x\to+\infty}(C_1 e^{-x}\vec{v}_1 + C_2 e^{2x}\vec{v}_2 + \vec{Y}_p) < \infty$ es equivalente a $C_2 = 0$ (ya que $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = \infty$), por tanto las soluciones buscadas son $\vec{Y} = C_1 e^{-x}\vec{v}_1 + \vec{Y}_p$ con $\vec{v}_1$ el autovector correspondiente a λ_1, es decir, $\left(\begin{smallmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right)\vec{v}_1 = \vec{0}$, por ejemplo $\vec{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ y se tiene

$$\vec{Y} = C_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Si $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(2+\cos^2(nx))/n + |x|} = \frac{x}{|x|}.$$

Evidentemente $f_n(0) = 0$, así pues $f_n \longrightarrow f$ puntualmente, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

No converge uniformemente porque el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, y f no lo es.

b) Es evidente que $|f_n(x)| < 1$ (porque $2+\cos^2(nx) > 0$), así pues $|g_n(x) - g(x)| \le a_n$ donde $a_n = 1/n$. Como $a_n \to 0$ entonces $g_n \longrightarrow g$ uniformemente.

3. Un vector tangente a la gráfica en el punto $P = (x, f(x))$ es $\vec{T} = (1, y')$. Escribamos $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$. Para que un rayo parta de A y al reflejarse en P llegue a B se debe cumplir que $\vec{AP}$ y $\vec{PB}$ formen el mismo ángulo con la tangente. Entonces

$$\frac{\vec{AP}\cdot\vec{T}}{\|\vec{AP}\|\,\|\vec{T}\|} = \frac{\vec{PB}\cdot\vec{T}}{\|\vec{PB}\|\,\|\vec{T}\|}.$$

Escribiendo las definiciones de A, B y $\vec{T}$, la igualdad anterior equivale a

$$\frac{x+1+yy'}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = \frac{1-x-yy'}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}.$$

Nota: Se puede probar que la solución de esta EDO es la familia de elipses $x^2/(C^2+1)+y^2/C^2=1$, pero eso no se pedía en el problema.

Soluciones del Modelo 2

1. La solución general es de la forma $y = y_H + y_p$ donde y_H es la solución general de la homogénea e y_p es una solución particular. Para hallar y_H se considera la ecuación característica que es $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ y cuyas raíces son $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$; por tanto

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Para hallar una solución particular se aplica la regla de los coeficientes indeterminados. El término e^{-x} del segundo miembro es solución de la homogénea y corresponde a $\lambda = -1$ que tiene multiplicidad uno en la ecuación característica, por consiguiente se debe probar con

$$y_p = Axe^{-x} + B.$$

Derivando

$$y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x}, \qquad y_p'' = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}.$$

La ecuación $y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 4e^{-x} + 3$ conduce a

$$e^{-x}(-2A - 2A + 0) - 3B = 4e^{-x} + 3$$

que igualando coeficientes implica $A = -1$, $B = -1$. En definitiva:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - xe^{-x} - 1.$$

2. Un vector tangente a la gráfica en el punto $P = (x, f(x))$ es $\vec{T} = (1, y')$. Escribamos $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$. Para que un rayo parta de A y al reflejarse en P llegue a B se debe cumplir que $\vec{AP}$ y $\vec{PB}$ formen el mismo ángulo con la tangente. Entonces

$$\frac{\vec{AP} \cdot \vec{T}}{\|\vec{AP}\|\ \|\vec{T}\|} = \frac{\vec{PB} \cdot \vec{T}}{\|\vec{PB}\|\ \|\vec{T}\|}.$$

Escribiendo las definiciones de A, B y $\vec{T}$, la igualdad anterior equivale a

$$\frac{x + 1 + yy'}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = \frac{1 - x - yy'}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}.$$

Nota: Se puede probar que la solución de esta EDO es la familia de elipses $x^2/(C^2 + 1) + y^2/C^2 = 1$, pero eso no se pedía en el problema.

3. a) Si $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1/n + x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Evidentemente $f_n(0) = 0$, así pues $f_n \longrightarrow f$ puntualmente, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

No converge uniformemente porque el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, y f no lo es.

b) Como $\log(1+nx^2) > \log(nx^2)$, Se tiene

$$|g_n(x)| = \Big| \log \frac{nx^2}{1+nx^2} \Big| = \log \frac{1+nx^2}{nx^2} = \log \big(1 + \frac{1}{nx^2}\big) \leq \log \big(1 + \frac{1}{n}\big).$$

Así pues $|g_n(x) - g(x)| \leq a_n$ donde $a_n = \log(1+1/n)$. Como $a_n \to 0$ entonces $g_n \longrightarrow g$ uniformemente.

Soluciones del Modelo 3

1. a) Si $1 < x \leq 2$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\operatorname{sen}^2 x)/x^{2n} + 1} = 1.$$

Mientras que si $0 \leq x < 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ porque en ese caso $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$. Evidentemente $f_n(0) = 1/(2+\operatorname{sen}^2 1)$, así pues $f_n \longrightarrow f$ puntualmente, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/(2+\operatorname{sen}^2 1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

No converge uniformemente porque el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, y f no lo es.

b) Nótese que en $[2, 4]$

$$0 < g_n(x) = \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x + x^{2n}} = \frac{1}{1 + x^{2n}/(1+\operatorname{sen}^2 x)} \leq \frac{1}{1+2^{2n-1}}.$$

Así pues $|g_n(x) - g(x)| \leq a_n$ donde $a_n = 1/(1+2^{2n-1})$. Como $a_n \to 0$ entonces $g_n \longrightarrow g$ uniformemente.

2. Sabemos que la solución general es de la forma $\vec{Y} = \vec{Y}_H + \vec{Y}_p$ donde $\vec{Y}_H$ es la solución general de la homogénea e $\vec{Y}_p$ es una solución particular. Los autovalores de la matriz del problema vienen dados por

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -20 \\ 4 & -9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,$$

de donde $\vec{Y}_H = C_1 e^{-x}\vec{v}_1 + C_2 e^{x}\vec{v}_2$ con $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ los autovalores correspondientes a $\lambda_1,\ \lambda_2$. La solución particular debe ser de la forma $\vec{Y}_p = \binom{A}{B}$ por la regla de coeficientes indeterminados ($\lambda = 0$ no es autovalor). Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{cases} 9A - 20B - 11 = 0 \\ 4A - 9B - 5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = B = -1.$$

La condición $\lim_{x\to+\infty}(C_1 e^{-x}\vec{v}_1 + C_2 e^{x}\vec{v}_2 + \vec{Y}_p) < \infty$ es equivalente a $C_2 = 0$ (ya que $\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty$), por tanto las soluciones buscadas son $\vec{Y} = C_1 e^{-x}\vec{v}_1 + \vec{Y}_p$ con $\vec{v}_1$ el autovector correspondiente a λ_1, es decir, $\left(\begin{smallmatrix} 10 & -20 \\ 4 & -8 \end{smallmatrix}\right)\vec{v}_1 = \vec{0}$, por ejemplo $\vec{v}_1 = \binom{2}{1}$ y se tiene

$$\vec{Y} = C_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Un vector tangente a la gráfica en el punto $P = (x, f(x))$ es $\vec{T} = (1, y')$. Escribamos $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$. Para que un rayo parta de A y al reflejarse en P llegue a B se debe cumplir que $\vec{AP}$ y $\vec{PB}$ formen el mismo ángulo con la tangente. Entonces

$$\frac{\vec{AP} \cdot \vec{T}}{\|\vec{AP}\| \, \|\vec{T}\|} = \frac{\vec{PB} \cdot \vec{T}}{\|\vec{PB}\| \, \|\vec{T}\|}.$$

Escribiendo las definiciones de A, B y $\vec{T}$, la igualdad anterior equivale a

$$\frac{x + 1 + yy'}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = \frac{1 - x - yy'}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}.$$

<u>Nota</u>: Se puede probar que la solución de esta EDO es la familia de elipses $x^2/(C^2 + 1) + y^2/C^2 = 1$, pero eso no se pedía en el problema.

Soluciones del Modelo 4

1. a) Si $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2/e^{nx}+1} = 1.$$

Mientras que si $x < 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ porque $\lim_{n\to\infty} e^{nx} = 0$. Evidentemente $f_n(0) = 1/3$, así pues $f_n \longrightarrow f$ puntualmente, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

No converge uniformemente porque el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, y f no lo es.

b) Es evidente que $0 < f_n(x) < 1$ (porque $e^{nx} < 2 + e^{nx}$), así pues $|g_n(x) - g(x)| \le a_n$ donde $a_n = 1/n$. Como $a_n \to 0$ entonces $g_n \longrightarrow g$ uniformemente.

2. Un vector tangente a la gráfica en el punto $P = (x, f(x))$ es $\vec{T} = (1, y')$. Escribamos $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$. Para que un rayo parta de A y al reflejarse en P llegue a B se debe cumplir que $\vec{AP}$ y $\vec{PB}$ formen el mismo ángulo con la tangente. Entonces

$$\frac{\vec{AP}\cdot\vec{T}}{\|\vec{AP}\|\,\|\vec{T}\|} = \frac{\vec{PB}\cdot\vec{T}}{\|\vec{PB}\|\,\|\vec{T}\|}.$$

Escribiendo las definiciones de A, B y $\vec{T}$, la igualdad anterior equivale a

$$\frac{x+1+yy'}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = \frac{1-x-yy'}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}.$$

<u>Nota</u>: Se puede probar que la solución de esta EDO es la familia de elipses $x^2/(C^2+1) + y^2/C^2 = 1$, pero eso no se pedía en el problema.

3. La solución general es de la forma $y = y_H + y_p$ donde y_H es la solución general de la homogénea e y_p es una solución particular. Para hallar y_H se considera la ecuación característica que es $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ y cuyas raíces son $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$; por tanto

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Para hallar una solución particular se aplica la regla de los coeficientes indeterminados. El término e^x del segundo miembro es solución de la homogénea y corresponde a $\lambda = 1$ que tiene multiplicidad uno en la ecuación característica, por consiguiente se debe probar con

$$y_p = Axe^x + B.$$

Derivando

$$y_p' = Ae^x + Axe^x, \qquad y_p'' = 2Ae^x + Axe^x.$$

La ecuación $y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 6e^x + 4$ conduce a

$$e^x(2A + A + 0) - 2B = 6e^x + 4$$

que igualando coeficientes implica $A = 2$, $B = -2$. En definitiva:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 2xe^x - 2.$$