Examen de E.D.O.

Segundo de Matemáticas (Gr. Mañana).   7 de Febrero de 2006

Duración: tres horas.
Calificaciones: se harán públicas en una semana aproximadamente.
Entrega del examen: La primera y la segunda parte se entregarán por separado.
Puntuación: La puntuación por problemas es 1'5+2+1'5+1'5+2+1'5.

Observación: si se elige hacer sólo la segunda parte se tomará como calificación de la primera la del parcial. En ese caso, se requiere aprobar ambas partes.

Primera parte

1. Resuélvanse los siguientes problemas de valores iniciales:

$$a)\quad \begin{cases} -8xyy' = x + 4y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} y^2 + 1 + (x^2+1)y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $f_n(x) = n^2x^\alpha/(1+n^4x^8)$. Determínense los valores $1 < \alpha < 8$ para los cuales la sucesión converge uniformemente en $[0,1]$.

3. Calcúlese la solución del siguiente sistema lineal:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Segunda parte

4. Transfórmese la ecuación $x'' + 4\operatorname{sen} x = 0$ en un sistema autónomo empleando el procedimiento habitual (escribiendo $y = x'$).

a) Hállese la ecuación de las trayectorias, esbozando su dibujo en el plano de fases.

b) Calcúlense todos los puntos críticos, decidiendo su estabilidad o inestabilidad.

5. Hállense los puntos críticos del siguiente sistema autónomo y estúdiese su naturaleza y estabilidad en el sistema linealizado:

$$\begin{cases} x' = x(x+y-3) \\ y' = y(x-y-1) \end{cases}$$

6. Considérese el problema

$$\begin{cases} y' = y^6 + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) Hállese un T (tratando que sea lo mayor posible) tal que se pueda asegurar existencia y unicidad de la solución en $[0,T)$.

b) Pruébese que si y está definida en $[0,1]$ entonces $y(1) > 1$.

c) Calcúlese U tal que se pueda asegurar que no existe una solución del problema definida en todo $[0,U]$. *Indicación*: compárese y con la solución de $z' = z^6$, $z(1) = 1$.

Soluciones

1. a) La ecuación diferencial $x + 4y^2 + 8xyy' = 0$ es exacta ya que $\partial M/\partial y = 8y = \partial N/\partial x$. Su solución implícita es $F(x, y) = C$ con $\nabla F = (M, N)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \ \Rightarrow \ F = \frac{x^2}{2} + 4xy^2 + g(y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N \ \Rightarrow \ g' = 0.$$

Por consiguiente se puede tomar $F(x, y) = x^2/2+4xy^2$, además sustituyendo la condición inical $C = F(1, 1) = 9/2$. Despejando la y en $F(x, y) = 9/2$ (en un entorno de la condición inicial), $y = \sqrt{(9 - x^2)/8x}$.

b) Separando variables:

$$y^2 + 1 = -(x^2 + 1)y' \ \Rightarrow \ \frac{1}{x^2 + 1} = -\frac{y'}{y^2 + 1},$$

e integrando, $\arctan x = -\arctan y + C$, que al sustituir $y(0) = 1$ implica $C = \pi/4$, por tanto $y = \tan(\pi/4 - \arctan x)$ y simplificando[1] $y = (1 - x)/(1 + x)$.

2. Se cumple $f_n(0) = 0$ y para $0 < x \le 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ porque $1 + n^4x^8$ es de grado 4 y n^2x^α de grado 2. Por tanto hay convergencia puntual a $f = 0$.

Para estudiar la convergencia uniforme hallemos el máximo de $f_n(x)$:

$$f_n'(x) = 0 \ \Rightarrow \ \alpha n^2x^{\alpha-1}(1 + n^4x^8) - 8n^4x^7n^2x^\alpha = n^2x^{\alpha-1}(\alpha - (8 - \alpha)n^4x^8) = 0.$$

Así pues $x_0 = C_\alpha n^{-1/2}$ con, $C_\alpha = (8/\alpha - 1)^{-1/8} > 0$, es un punto crítico que está en $[0, 1]$ para n suficientemente grande. Además en x_0 se alcanza un máximo porque $f' > 0$ en $(0, x_0)$ y $f' < 0$ en $(x_0, 1)$. En definitiva

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f| = f_n(x_0) = \frac{C_\alpha^\alpha n^{2-\alpha/2}}{1 + C_\alpha^8}$$

que tiende a cero si y sólo si $2 - \alpha/2 < 0$. Por tanto hay convergencia uniforme exactamente para $4 < \alpha < 8$.

3. El polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 4 \\ -8 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3, \qquad P(\lambda) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = -1, 3.$$

Como son distintos, si llamamos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ a los correspondientes autovalores, $\{e^{-x}\vec{v}_1, e^{3x}\vec{v}_2\}$ es una base del espacio de soluciones de la homogénea. Estos autovectores son cualesquiera vectores no nulos satisfaciendo $(A + I)\vec{v}_1 = \vec{0}$ y $(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{0}$. Se pueden tomar por ejemplo

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

[1] Para frenar una epidemia repetida en los exámenes, nótese que $\tan(a+b) \neq \tan a+\tan b$. La fórmula correcta, aquí aplicada, es $\tan(a + b) = (\tan a + \tan b)/(1 - \tan a \tan b)$.

Una solución particular se obtiene probando vectores constantes (método de los coeficientes indeterminados)

$$\vec{Y}_P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = 1.$$

Consecuentemente la solución general es:

$$\vec{Y} = \vec{Y}_H + \vec{Y}_P = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y la condición inicial, $\vec{Y}(0)$ implica $C_1 = C_2 = 1$.

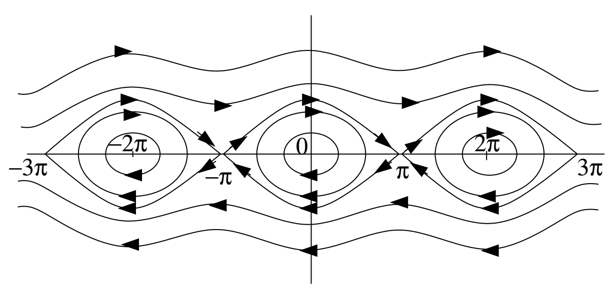
4. Con la sustitución indicada $x' = y$, $y' = -4 \operatorname{sen} x$.

a) Con el abuso de notación obvio, llamamos y' a la derivada de $y = y(x)$ (y como función de x). La ecuación de las trayectorias es:

$$y' = G/F \;\Rightarrow\; yy' = -4 \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; y^2 = 8 \cos x + C.$$

La función $8\cos x + C$ es una sinusoide con máximos en $x = 2k\pi$ y mínimos en $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Cuando $C > 8$, $8\cos x + C > 0$ y por tanto $y = +\sqrt{8\cos x + C}$ es una sinusoide del mismo tipo. Cuando $C < 8$, para algunos valores de x, $8\cos x + C < 0$ y entonces al extraer la raíz cuadrada positiva la sinusoide desaparecerá en ellos. Si C es sólo un poco mayor que -8 entonces las trayectorias se limitarán a un pequeño entorno de $x = 2k\pi$ (donde $\cos x = 1$) y si $C < -8$ no hay nada que dibujar. El caso $y = -\sqrt{8\cos x + C}$ es evidentemente simétrico. Finalmente, nótese que la ecuación $x' = y$ del sistema autónomo implica que la orientación es hacia la derecha ($x' > 0$) en el semiplano superior y hacia la izquierda ($x' < 0$) en el inferior.

Combinando toda esta información se obtiene cualitativamente el dibujo siguiente en el plano de fases:



b) Los puntos críticos tienen $y = 0$, $-4 \operatorname{sen} x = 0$, esto es, son $(x, y) = (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Del dibujo anterior se deduce que los puntos $((2k+1)\pi, 0)$ son inestables (también se puede hacer fácilmente linealizando, son puntos de silla en el lineal) mientras que $(2k\pi, 0)$ son estables (no asintóticamente) puesto que en sus cercanías las trayectorias son periódicas (también se puede usar la función de Lyapunov $E(x,y) = y^2/2 + 4 - 4\cos x$. El sistema es conservativo).

5. Los puntos críticos con $x = 0$ tienen y dada por $y(0 - y - 1) = 0$, es decir, son $(0,0)$ y $(0,-1)$. De la misma forma $y = 0$ conduce a $(0,0)$ y $(3,0)$. Por último, $x, y \neq 0$ lleva a $(2,1)$, que es la solución de $x + y - 3 = x - y - 1 = 0$.

En cada uno de estos puntos críticos $P = (x_0, y_0)$ el sistema linealizado es[2]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Df(P) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad f(x,y) = \begin{pmatrix} x(x+y-3) \\ y(x-y-1) \end{pmatrix}.$$

Las matrices correspondientes en cada punto crítico son[3]

$$(0,0) \to \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3,0) \to \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (0,-1) \to \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2,1) \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las tres primeras matrices son triangulares y por tanto los autovalores se calculan trivialmente siendo $\lambda = -3, -1$; $\lambda = 3, 2$; $\lambda = -4, 1$; respectivamente. En el primer y segundo caso la pareja de autovalores tiene el mismo signo, negativo en el primer caso y positivo en el segundo, así que corresponden a nodos, estable e inestable en $(0,0)$ y $(3,0)$, respectivamente. En el tercer caso el signo es distinto lo que corresponde a un punto de silla en $(0,-1)$. Para $(2,1)$ un cálculo lleva al polinomio característico $\lambda^2 - \lambda - 4$ que tiene raíces reales de distinto signo, por lo que $(2,1)$ es también punto de silla.

6. a)[4] Para cualquier rectángulo $R = [-a, a] \times [-b, b]$ se cumple que la solución existe al menos en $|x| < \epsilon$ con $\epsilon = \min(a, b/(b^6 + 1))$ (éste es un teorema visto en clase). Tomando $a = b = 1$ ya se obtiene $T = 1/2$ como un valor válido. Se puede apurar más hallando el máximo de $b/(b^6 + 1)$, que se alcanza en $b = 5^{-1/6}$ y produce $T = 5^{5/6}/6$.

b) $y' = y^6 + 1$, $y(0) = 0 \Rightarrow y(1) = \int_0^1 (y^6(x) + 1)dx > \int_0^1 1\ dx = 1$ (la última desigualdad es estricta porque y no es idénticamente nula).

c) Se puede calcular explícitamente z

$$z^{-6} z' = 1 \ \Rightarrow \ z^{-5} = -5x + C, \ z(1) = 1 \ \Rightarrow \ z = (6 - 5x)^{-1/5}.$$

Por tanto z está definida en $[0, 6/5)$ y cumple $\lim_{x \to 6/5^-} z(x) = +\infty$. Esto llevaría a una contradicción si y estuviera definida en $[0, 6/5]$ ya que $y \geq z$ en $[1, 6/5)$, porque $y(1) > z(1) = 1$ y la derivada de y es mayor. En definitiva, se puede tomar $U = 6/5$.

[2] Ésta es la aproximación de Taylor. Nótese que cada coordenada de f es un polinomio de grado 2, así que el resto será un polinomio de grado dos en $x - x_0$ e $y - y_0$, lo que garantiza que al dividir por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ tiende a cero. Muchos alumnos se toman trabajo en hacer esta comprobación.

[3] También se pueden hallar, como han hecho la mayoría, con una traslación al puto $(0,0)$ y eliminando los términos de mayor grado. Esto es totalmente equivalente a Taylor.

[4] Se pedía halla un T explícitamente, no afirmar que por un teorema general existe algún T.