Problemas de E.D.O. (2^{o} de Matemáticas)

1. Dados los sistemas lineales

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 7 \\ y' = -x - 2y + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x - 2y + 3 \\ y' = 2x - y - 6 \end{cases}$$

a) Determínese la naturaleza de sus puntos críticos y sus propiedades de estabilidad.

b) En el caso en el que se obtiene un punto de silla, ¿cómo se podrían determinar las direcciones de sus ejes?

2. En cada uno de estos sistemas determínese la naturaleza del punto crítico $(0,0)$ y sus propiedades de estabilidad:

$$a) \quad \begin{cases} x' = x + y - 2\,\mathrm{sen}(xy) \\ y' = -2\,x + y + 3\,y^2 \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} x' = -\,\mathrm{sen}(x+y) + 1 - e^{-x2} \\ y' = -2\,x + 4\,y + y\,\mathrm{sen}(x+y) \end{cases}$$

3. Estúdiense los puntos críticos del siguiente sistema autónomo y esbócese una posibilidad coherente con estos datos para las trayectorias del sistema en el primer cuadrante.

$$\begin{cases} x' = x\,(60 - 4\,x - 3\,y) \\ y' = y\,(42 - 3\,x - 2\,y) \end{cases}$$

4. Considérese el sistema

$$\begin{cases} x' = y + x\,(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y\,(x^2 + y^2) \end{cases}$$

a) Estúdiese que tipo de punto crítico es $(0,0)$ en el sistema linealizado.

b) Resuélvase el sistema no lineal empleando coordenadas polares y decídase la estabilidad de dicho punto crítico.

5. Se llama *ecuación de van der Pol* al problema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \mu y(x^2 - 1) \end{cases}$$

donde $\mu \neq 2$ es una constante. Estúdiese la naturaleza del punto crítico $(0,0)$ en función de μ. *Nota*: en el caso en el que la linealización no es válida, se puede resolver el sistema.

6. Transfórmese la ecuación del péndulo $x'' + \mathrm{sen}\,x = 0$ en un sistema autónomo con el procedimiento habitual (escribiendo $y = x'$).

a) Calcúlense todos los puntos críticos.

b) Hállese la ecuación de las trayectorias

c) Decídase la estabilidad y carácter de todos los puntos críticos.
d) ¿Qué función de Liapunov se podría emplear para probar la estabilidad en $(0,0)$?

7. Hállense los puntos críticos de los siguientes sistemas y estúdiese su estabilidad.

$$a)\quad \begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases} \qquad\qquad b)\quad \begin{cases} x' = e^{x+y} + y \\ y' = y - x\,y \end{cases}$$

8. Pruébese que el sistema:

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

tiene (al menos) una solución periódica rodeando al origen. Estúdiese la estabilidad de ese punto. *Indicación*: Utilícense coordenadas polares.

9. Determínese una función de Liapunov para

$$\begin{cases} x' = -2y - x^3 \\ y' = x/2 - 4y^3 \end{cases}$$

10. Hállese una función de Liapunov de la forma $\alpha(2x+y)^2 + \beta(x+y)^2$ que pruebe la estabilidad en el origen del sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = -3x - 2y - (2x+y)^3 + (x+y)^3 \\ y' = 5x + 3y - 2(x+y)^3 + (2x+y)^3 \end{cases}$$

11. Estúdiese si los siguientes sistemas autónomos tienen alguna solución periódica.

$$a)\quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -y - x^2 y + x^5 \end{cases} \qquad\qquad b)\quad \begin{cases} x' = y + x^3(2 - e^{x^2+y^2}) \\ y' = -x + y^3(2 - e^{x^2+y^2}) \end{cases}$$

***12.** Pruébese que si $(0,0)$ es asintóticamente estable para $x' = F(x,y)$, $y' = G(x,y)$; entonces es inestable para $x' = -F(x,y)$, $y' = -G(x,y)$. Utilícese este hecho para enuciar un teorema como el de Liapunov cuya conclusión sea la inestabilidad. *Indicación*: Considérese la inversión temporal $t \mapsto -t$.

***13.** Escribiendo la ecuación $x'' + x = \epsilon x^2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ (con ϵ pequeño) como un sistema autónomo, pruébese que tiene una solución periódica. Ésta debería parecerse a $\cos t$. El método de Lindstedt permite desarrollar la solución como

$$x(t) = \cos(\omega t) + \epsilon x_1(\omega t) + \epsilon^2 x_2(\omega t) + \dots \qquad \text{con} \qquad \omega = 1 - \frac{5}{12}\epsilon^2 + \dots$$

donde x_j son funciones que se calculan de forma que al sustituir $x(t)$ en la ecuación, los términos de cualquier grado en ϵ desaparezcan. Confiando en este argumento hasta grado dos, inferir que el centro de la oscilación de la solución es $(3 - 2\epsilon)\epsilon/6$ aproximadamente.