# **Problemas de E.D.O.** (2º de Matemáticas)

**1.** Sean $y_1, y_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos soluciones de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.
a) Pruébese que su wronskiano $W = W(y_1, y_2)$ cumple $W' + P(x)W = 0$.
b) Dedúzcase que o bien $W$ es idénticamente nulo o bien no se anula en ningún punto.

**2.** Compruébese que $y(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ e $y(x) = 0$ son soluciones de

$$\begin{cases} x^2\, y'' - 4\, x\, y' + (x^2+6)\, y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

¿Por qué esto no contradice el teorema de unicidad de soluciones para ecuaciones lineales?

**3.** a) Compruébese que al escribir la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ como un sistema, el polinomio característico de la ecuación coincide con el polinomio característico de la matriz del sistema, $\det(A - \lambda I)$.
b) ¿Cómo se generaliza esto a orden mayor que dos?

**4.** Sea $y_1, y_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Demuéstrese que son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si el *determinante de Gram*

$$G(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{con} \qquad a_{ij} = \int_a^b y_i(x) y_j(x)\, dx$$

es idénticamente nulo. *Indicación*: Para el recíproco, pruébese que $\int_a^b (\lambda y_1 + \mu y_2)^2$ se anula para ciertos $\lambda$ y $\mu$.

**5.** Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones de $x'' + P(t)\, x' + Q(t)\, x = 0$
a) Pruébese que si tienen un cero común entonces una de ellas es múltiplo constante de la otra. *Indicación*: Encuéntrese una combinación lineal que satisfaga las mismas condiciones iniciales que la función nula.
b) Demuéstrese que la misma conclusión se obtiene cuando ambas funciones tienen máximos o mínimos relativos en un mismo punto.

**6.** a) Compruébese que $\mathcal{B} = \{\cos x - \operatorname{sen} x, 2 \operatorname{sen} x\}$ es una base del espacio de soluciones de $y'' + y = 0$.
b) ¿Cuáles son las coordenadas de la solución que cumple $y(0) = y'(0) = 1$ en dicha base?

**7.** a) Pruébese por inducción que la derivada $m$-ésima de $xe^{rx}$ es $mr^{m-1}e^{rx} + r^m xe^{rx}$.
b) ¿Cuál es la derivada $m$-ésima de $x^2 e^{rx}$?
c) Dedúzcase que para $r = 1$ ambas funciones son soluciones de $y^{(n+3)} - 3y^{(n+2)} + 3y^{(n+1)} - y^{(n)} = 0$.

**8.** Resuélvase
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10 \end{cases}$$

**9.** Considérese la ecuación con coeficientes constantes
$$y'' + ay' + by = 0.$$
Demuéstrese que la solución general tiende a 0 cuando $t \to +\infty$ si y sólo si $a$ y $b$ son ambos positivos.

**10.** Resuélvase
$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3 \end{cases}$$

**11.** Sabiendo que $i - 1$ es raíz del polinomio característico, calcúlese la solución general de
$$y^{(iv)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

**12.** Demuéstrese que si $a_0 \neq 0$ entonces la ecuación $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = x^k$ tiene una única solución polinómica y ésta es de grado $k$.

**13.** Hállese la solución general de $y''' - 2y'' + y' = x^2$.

**14.** Hállese una solución particular de $y'' + y = \cos(x + \alpha)$ donde $\alpha$ es una constante.

**15.** Notando que la función identidad es solución de $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, hállese la solución general.

**16.** Sabiendo que $x_1(t) = t^2$ es solución de
$$t^2\, x'' + t\, x' - 4\, x = 0,$$
hállese una segunda solución $x_2(t)$ linealmente independiente y la solución que verifica $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$.

**17.** Hállese la solución general de la ecuación lineal no homogénea
$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

**18.** Pruébese que el método de variación de las constantes aplicado a la ecuación
$$y'' + y = f(x),$$

conduce a la solución particular

$$y(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{sen}(x-s)\,ds\,.$$

**19.** Hállese la solución de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}, \qquad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**20.** Para el siguiente sistema, hállese una matriz fundamental $\Phi = \Phi(t)$ que cumpla $\Phi(0) = \mathrm{Id}$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

**21.** Hállese la solución de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**22.** Hállese la solución general $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} x-1 \\ -5x-2 \end{pmatrix}.$$

*Indicación*: Es más breve buscar una solución particular de un tipo especial, que aplicar el método de variación de las constantes.

**23.** Resuélvase

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathrm{cosec}\, t \\ \sec t \end{pmatrix}.$$

**24.** Resuélvase el sistema en $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**25.** Hállese la solución $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ del sistema

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\, x & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

y escríbase la matriz fundamental $\Phi$ en la forma $\Phi(x) = B(x)e^{xL}$ donde $B(x)$ es una matriz cuyos elementos son funciones periódicas y $L$ es una matriz constante.

**26.** Una partícula de masa $m = 1$ se movería libremente en movimiento armónico simple alrededor del origen con frecuencia $\sqrt{2}/(2\pi)$ oscilaciones por segundo, pero se ve afectada por una fuerza de rozamiento igual al doble de su velocidad. Hállese la ecuación de movimiento en términos de la posición $x_0$ y velocidad $v_0$ en el tiempo $t = 0$.

**27.** La amplitud de cierto péndulo somentido a oscilaciones forzadas responde a la ecuación

$$x'' + \epsilon x' + 4x = \operatorname{sen}(\omega t)$$

donde $\epsilon > 0$ es muy pequeño. Hállese la solución estacionaria (esto es, sin términos que tiendan a cero cuando $t \to +\infty$) para $\omega = 1$ y $\omega = 2$. Explíquese en qué se manifiesta el fenómeno de la resonancia.

**28.** Hállese la solución de

$$\begin{cases} y' - 2xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

como serie de potencias.

**29.** Sabiendo que

$$\begin{cases} y' = e^y + xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admite una solución en serie de potencias, hallarla hasta términos de grado 3.

**30.** Sea $I$ el operador identidad y $D$ el operador derivación, de modo que $(I - D)y = y - y'$. Explíquese la identidad $(I - D)^{-1} = I + D + D^2 + D^3 + \ldots$ cuando ambos miembros tengan sentido.

**31.** Sea $y_1$ una solución no trivial de $y'' + q(x)y = 0$ e $y_2$ una solución no trivial de $y'' + r(x)y = 0$, donde $q(x) > r(x) > 0$.

a) Pruébese que si $y_1$, $y_2$ son positivas en cierto intervalo $I$, entonces el wronskinado $W = W(y_1, y_2)$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.

b) Pruébese que si una función $f \in C^1$ es positiva para $a < x < b$ y $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f'(a) \geq 0 \geq f'(b)$.

c) Dedúzcase el teorema de comparación de Sturm: Si $y_1$, $y_2$ son como en el enunciado, entonces $y_1$ se anula al menos una vez entre cada par de ceros consecutivos de $y_2$.