E.D.O. (septiembre 2006) (2º de Matemáticas)

1. Resuélvase el sistema:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 11 & 30 \\ -4 & -11 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $f_n(x) = nx^\alpha/(1+n^2x^2)$. Determínense los valores de $\alpha > 1$ para los que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tiende a cero uniformemente sobre $[0,1]$.

3. Resuélvanse los problemas de valores iniciales:

$$\begin{cases} xy^2 + x + (x^2+4)y' = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x + xy^2 + (x^2+1)yy' = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

4. Considérese el problema:

$$\begin{cases} xy' + (x-1)y = x^2 + x - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué puntos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se puede asegurar que hay existencia y unicidad?
b) Resolviendo la ecuación explícitamente dedúzcase qué sucede en el resto de los puntos.

5. Se considera el sistema autónomo no lineal:

$$\begin{cases} x' = 4 + 2y - x^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

a) Hállese la ecuación de las trayectorias (escríbase el resultado como $F(x,y) = C$).
b) Pruébese que si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una solución no constante entonces no puede ocurrir

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = (0,-2) \qquad \text{ni} \qquad \lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = (0,-2)$$

Indicación: Se tendría $F(\gamma(t)) = F(0,-2)$ y de aquí una contradicción si $0 < |\gamma(t_0) - (0,-2)| < \epsilon$.

6. Determínese la naturaleza de los puntos críticos del sistema del ejercicio anterior y sus propiedades de estabilidad (se puede dar por supuesto el segundo apartado de dicho ejercicio).

(Examen especial de septiembre 1)

1. Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$f_n(x) = 1 + xn^{\alpha}e^{-n^2x^2}$$

converge uniformemente a alguna función sobre $[0, 1]$.

2. Resolver

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Hallar la solución general de la ecuación

$$xy' + y = y^2 \log x$$

aplicando el cambio de variable $u = y^{-1}$.

4. Clasificar los puntos críticos de

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^2 - xy \end{cases}$$

y esbozar un dibujo en el plano de fases que sea coherente con la información obtenida.

5. Resolver la ecuación $xy' + (x - 1)y = x^2$ y probar que hay un punto por el que pasan las gráficas de todas las soluciones. Comentar por qué no hay contradicción con el teorema de unicidad y estudiar si hay algún otro punto por el que pase más de una solución.

6. Determinar una función de Liapunov para estudiar la estabilidad del origen en

$$\begin{cases} x' = -2y - x^3 \\ y' = x/2 - 4y^3 \end{cases}$$

(Examen especial de septiembre 2)

1. Resuélvase el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} xy' = 3(y - y^{2/3}) \\ y(1) = 8 \end{cases}$$

2. Sea $f_n(x) = n^4 x^\alpha e^{-n^2x^2}$. Determínense los valores de $\alpha > 0$ para los que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tiende a cero uniformemente sobre $[0, \infty)$.

3. Resuélvase el sistema:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Esbócense las trayectorias en el plano de fases de

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x^2 - xy + 4x + y - 3 \end{cases}$$

especificando la naturaleza y estabilidad o inestabilidad de los puntos críticos.

5. Si en el primer ejercicio se sustituye la condición inicial por $y(x_0) = y_0$, explíquese para qué pares $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se puede asegurar que hay existencia y unicidad de solución (local). Si $x_0 = 0$, calcúlese un y_0 para el que no haya solución y otro para el que haya infinitas.

6. Decídase razonadamente qué puntos críticos del sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \cos x \end{cases}$$

son estables.