Problemas de E.D.O. (2º de Matemáticas)

1. Para cada una de las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ siguientes, determínese el límite puntual de la sucesión (si existe) en el conjunto o conjuntos indicados, e indíquese si la convergencia es uniforme.

a) $f_n(x) = \exp(-n\,x^2)\,,\quad$ sobre $[-1,1]\,.$

b) $f_n(x) = x^{1/n}\,,\quad$ sobre $[0,1]\,.$

c) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ en $[0,1-\varepsilon]$, en $[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$, y en $[1+\varepsilon,\infty)$.

d) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le n \\ x-n & \text{si } x \ge n \end{cases}$ en cada $[a,b]$ y en $\mathbb{R}\,.$

e) $f_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+n^2\,x^2}$ en $[-1,1]$ y en $[1,\infty)$.

f) $f_n(x) = x^{-n}e^{x}$ en $(1,\infty)$.

2. Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$, dada por $f_n(x) = n^2\,x\,e^{-nx^2}$

a) Estúdiese la convergencia puntual e uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Compruébese que a pesar de que converge puntualmente a una función integrable y que cada f_n es integrable, se tiene $\lim \int_0^1 f_n = \infty$.

3. Pruébese que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = x\,e^{-nx^2}$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$ y que $f_n'(x) \to 0$ puntualmente en $\mathbb{R}$, pero que esta convergencia no es uniforme en ningún intervalo que contenga a 0.

4. Encuéntrese una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja uniformemente a f en $[0,\infty)$ para las que existan $\lim \int_0^{\infty} f_n$ y $\int_0^{\infty} f$ pero no coincidan.

5. Sea $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$ en $\mathbb{R}$.

a) Estúdiese a qué función converge puntualmente la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y si la convergencia es uniforme.

b) Descríbase la función $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(k!x)$.

6. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones dadas por $f_n(x) = x^2 + 1/n$ y $g_n(x) = (nx)^{-1}$.

a) Demuéstrese que ambas convergen uniformemente en $[1,\infty)$ y sin embargo la sucesión de término general $f_n g_n$ no lo hace.

b) Demuéstrese que a pesar de que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función f, $\{f_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a f^2.

7. Determínese exactamente el conjunto de valores reales de x para los que las siguientes series convergen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^{2005}+n^{2006}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{n^3} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(3+(-1)^n)^n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} (n+2^{-n})x^n$$

8. ¿Converge la serie de Taylor (alrededor de $x=0$) de $\log(1-x)$ uniformemente en $[-1/2,1/2]$? ¿Y la de e^x en $\mathbb{R}$?

9. Sea la sucesión de término general $f_n(x) = x/(1+n\,x^2)$. Compruébese que converge uniformemente a cierta f en $\mathbb{R}$ y que se se verifica $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ para cualquier $x \neq 0$ pero no para $x=0$.

10. Encuéntrese una sucesión de funciones derivables en $(-1,1)$ que converja uniformemente a $f(x) = |x|$.

11. Demuéstrese que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

es uniformemente convergente en cada intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

12. Pruébese que dado $\alpha > 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n^2+2n+1)x)}{n^\alpha}$$

define una función continua. Compruébese que para $\alpha \leq 1$ hay valores de x para los que ni siquiera converge. *Indicación*: Tómese $x = \pi/2$.

13. Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa que es no nula exactamente en $(-1,1)$ y tal que $\int \phi = 1$.

a) Demuéstrese que para cualquier función continua $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ se cumple que $\lim \int_{-1}^{1} n\phi(nx)f(x)\,dx = f(0)$. *Indicación*: Empléese la convergencia uniforme fuera de $[-\epsilon,\epsilon]$ y aproxímese $f(x)$ por $f(0)$ dentro de este intervalo.

b) Con razonamientos como los del apartado anterior, demuéstrese que para cualquier función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} ne^{-nx} f(x)\,dx = f(0).$$

Nota: Aunque $f_n(x) = n\phi(nx)$ ni siquiera converge puntualmente, se puede dar cierto sentido matemático a su límite. Intuitivamente sería una “función” (llamada delta de Dirac) que se anula para $x \neq 0$ y que verifica su integral es uno, por tanto debe ser "muy infinita" en cero. En Física se usa por ejemplo para representar la densidad cuando se tiene una sola partícula puntual de masa uno en el origen.

14. a) Demuéstrese que $d(f,g) = \int_0^1 |f-g|$ define una distancia en el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ pero no la define en el espacio de funciones integrables en $[0,1]$.

b) Hállese una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas en $[0,1]$ verificando la "condición de Cauchy" $\lim_{n,m\to\infty} d(f_n, f_m) = 0$, y que sin embargo no converja a ninguna función continua si se emplea la distancia d, es decir, tal que no se satisfaga $\lim d(f_n, f) = 0$ para ninguna f continua

***15.** Pruébese que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^5 x)}{n^3 \operatorname{sen}(\pi n\sqrt{5})}$$

converge uniformemente. *Indicación*: $n\sqrt{5} - m = (5n^2 - m^2)/(n\sqrt{5} + m)$. *Nota*: Si se cambia π por e se desconoce incluso si la serie está bien definida.

***16.** En este problema se probará que $\pi \notin \mathbb{Q}$ considerando la sucesión de funciones $f_n(x) = a^{2n} x^n (1-x)^n / n!$ y las integrales $I_n = \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$.

a) Empleando la convergencia uniforme, dedúzcase que para cualquier $a > 0$ se cumple $\lim I_n = 0$.

b) Pruébese que todas las derivadas de $a^{-2n} f_n(x)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ son números enteros.

c) Suponiendo $\pi = a/b$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, integrando por partes y empleando el apartado anterior, demuéstrese que $\pi I_n \in \mathbb{Z}$.

d) Empléese que una sucesión de enteros (estrictamente) positivos no puede tener límite nulo, para llegar a una contradicción.