Problemas de E.D.O. (2º de Matemáticas)

1. Utilizando las isoclinas, esbozar las soluciones de $y' = y^2 - 1$. Estudiar especialmente la que cumple $y(0) = 0$, indicando su concavidad y convexidad, sus simetrías y su comportamiento en el infinito.

2. Trazando algunas isoclinas, esbozar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $y' = \operatorname{sen}(y + x)$, b) $x' = \sqrt{t^2 + x^2}$

3. Resolver la siguiente ecuación y comparar el resultado con lo obtenido por el método de isoclinas empleado anteriormente.

$$\begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4. Según la *Ley de enfriamiento de Newton* la tasa de variación de la temperatura en un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura con el ambiente. Si una barra de hierro a 100ºC se enfría a 90ºC en 5s cuando se deja a una temperatura ambiente de 20ºC, ¿cuánto tardará en estar a 30ºC?

5. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $e^{-y}(y' + 1) = 1$, *b)* $1 + y^2 + (1 + x^2)y' = 0$.

6. Un conductor por una carretera comarcal ve una señal que indica "Reduzca a 50", un rato después otra que indica "Reduzca a 40", más adelante se encuentra con otras análogas de 30, 20 y 10. Finalmente, una última señal indica "Bienvenidos a Reduzca".

a) Si en el chiste (¿?) anterior hubiera infinitas señales, espaciadas infinitesimalmente, ¿qué ecuación diferencial gobernaría el movimiento del coche?

b) En el supuesto del apartado anterior, ¿llegaría alguna vez a Reduzca?

7. Una población de bacterias que sigue la Ley de Malthus (la tasa de variación es proporcional al número de individuos) se duplica al cabo de 24 horas. ¿Cuánto tardará en triplicarse?

8. Supongamos que una población sigue el modelo $p' = bp^2 - ap$ con $a, b > 0$. Demostrar que si $p(t_0) < a/b$, entonces la población tiende a extinguirse.

9. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $4x - 3y + (2y - 3x)y' = 0$, *b)* $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$, *c)* $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$.

En el segundo apartado, la solución $y = x$ no aparece típicamente representada en la fórmula de la solución general. Trátese de dar una explicación, aunque sea intuitiva, de este hecho. Nótese que $y(x) = x$ e $y(x) = -x$ son dos soluciones de $b)$ bajo la condición $y(0) = 0$, es decir, ni siquiera hay unicidad. Estos temas se tratarán más adelante en el curso.

10. Calcular la solución de los siguientes problemas de valor inicial

$$a) \quad \begin{cases} x\,(2\,x^2 + y^2) + y\,(x^2 + 2\,y^2)\,y' = 0\,, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} y + y\,\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x} + \big(x\,\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\big)\,y' = 0 \\ y(\pi) = \pi \end{cases}$$

11. Hallar un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x + y^2)$, para la ecuación

$$3\,y^2 - x + 2\,y\,(y^2 - 3\,x)\,y' = 0\,.$$

Calcular la solución general de la ecuación.

12. Demostrar que si $\mu_1(x,y)$ y $\mu_2(x,y) \neq 0$ son dos factores integrantes de la ecuación

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0\,,$$

cuyo cociente no se reduce a una constante, entonces

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = C$$

es solución de la ecuación.

13. a) Hallar todas las soluciones de las ecuaciones

$$a) \quad t\,x' + (1-t)\,x = 0\,, \quad b) \quad t\,x' + (1-t)\,x = 1\,,$$

b) Calcular las soluciones que cumplen $x(0) = 0$ y $x(0) = 1$, o demostrar que tales soluciones no existen.

14. Demostrar que si $Q(t)$ es un polinomio de grado n, la ecuación

$$t\,x' + x = Q(t)$$

tiene exactamente una solución polinómica de grado n.

15. Resolver

$$a) \begin{cases} x' + x = 2\,t\,e^{-t} + t^2 \\ x(0) = 4 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} y' - 2\,x\,y = 6\,x\,\exp(x^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

16. Resolver

$$a) \quad (y'')^2 + (y''')^2 = 1, \qquad b) \quad y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$$

17. La ecuación

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n\,, \qquad n \neq 0, 1\,,$$

se conoce como *ecuación de Bernoulli.*

a) Compruébese que la sustitución $z = y^{1-n}$ reduce esta ecuación a una ecuación lineal. Aplíquese esta sustitución para resolver

$$a) \quad xy' + y = y^2 \log x, \qquad b) \quad 2y' \operatorname{sen} x + y \cos x = y^3(x \cos x - \operatorname{sen} x).$$

18. Efectuar un cambio de variable que reduzca $y' = \operatorname{sen}(x-y)$ a una ecuación de variables separables, y resolverla.

19. La *ecuación de Ricatti* es

$$y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)\,,$$

donde $P(x)$ no es idénticamente nula.

a) Demostrar que si conoce una solución particular $y_1(x)$, entonces la sustitución

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

permite resolver la ecuación.

b) Demostrar que si $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ son tres soluciones particulares de la ecuación de Ricatti, entonces la solución general viene dada por

$$\frac{y-y_2}{y-y_3}\,\frac{y_1-y_3}{y_1-y_2} = C\,.$$

c) Aplicar lo anterior para resolver la ecuación

$$2\,x^2\,y' = (x-1)(y^2-x^2) + 2\,x\,y.$$

20. Sea $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Demostrar que si todas las tangentes a su gráfica pasan por un mismo punto, entonces es un segmento de recta, y que si todas las normales pasan por un mismo punto, es un arco de circunferencia.

21. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas $y^2 - Cx = C^2/4$.

22. La gráfica de $y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tiene la propiedad de que el área bajo la curva desde $(0,0)$ a (x,y) es un tercio del área del rectángulo paralelo a los ejes que tiene esos puntos como vértices opuestos. Hallar la función y.

23. Hallar una curva tal que el segmento de la recta de la tangente determinado por los ejes tiene su punto medio en el punto de tangencia.

24. Determinar las curvas con la propiedad de que la distancia del origen a la tangente es igual a la primera coordenada del punto de tangencia.

25. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencias definida por $x^2 + (y - C)^2 = C^2$. Interprétese el resultado geométricamente.

26. En Cosmología el estado del Universo se representa por un factor de expansión $C = C(t)$ que en el instante inicial $t = 0$ (el *big-bang*) cumple $C(0) = 0$. En el tiempo actual $t = T_a$ (la edad del Universo) toma un valor indeterminado, sin embargo es posible aproximar experimentalmente el valor de la *constante de Hubble* $H_0 = C'(T_a)/C(T_a)$ (dividiendo velocidades y distancias de galaxias lejanas).

a) Según el "modelo plano", C debe satisfacer $\big(C(C')^2\big)' = 0$. Obténgase la relación entre H_0 y T_a, y dedúzcase la edad del Universo T_a a partir del valor a veces aceptado $H_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-18} s^{-1}$.

b) Con los resultados del apartado anterior, hallar cuántos años deben pasar desde la actualidad para que C se incremente un $1\,\%$.