CÁLCULO III, 2º Curso de CC. MATEMÁTICAS, 2001/2002

Examen extraordinario, 12 de septiembre de 2002

Apellidos y Nombre:

D.N.I. **Grupo:**

---

1. Considérense las ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(u+x) + u\,v\,x\,y + \log(1+v+y) = 0\,, \\ \cos(u+y) + \operatorname{sen}(u-v+x) - e^{y} + v^{2} = 0\,. \end{cases}$$

a) Probar que existen dos funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clase C^1 en un entorno del origen, con $f(0,0) = g(0,0) = 0$ y tales que las ecuaciones anteriores se satisfacen en dicho entorno con $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$.

b) Calcular $\nabla f(0,0)$ y $\nabla g(0,0)$.

---

2. Sea $\mathcal{C}$ el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + 6\,y^2 + z^2 + 2\,x\,y - 4\,y\,z = 1\,, \\ x + z = 0\,. \end{cases}$$

a) Probar que $\mathcal{C}$ es una curva regular.

b) Probar que en un entorno de $\mathbf{p} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, la curva $\mathcal{C}$ admite una parametrización local del tipo $\sigma(t) = (x(t), y(t), t)$.

c) Hallar la ecuación del plano normal a $\mathcal{C}$ en $\mathbf{p}$.

---

3. Hallar los puntos de la curva

$$\begin{cases} x^2 + 2\,y^2 + 2\,x + 4\,y - 9 = 0\,, \\ y - z = 0\,, \end{cases}$$

más cercanos al origen de coordenadas.

---

4. Considérense la superficie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ determinada por

$$\mathcal{S} : \qquad x^2 + y^2 \leq 1\,, \quad x^2 + y^2 + 1 = z^2\,, \quad z > 0\,,$$

y el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = (x\,z^2, y\,z^2, z^3)\,.$$

Se pide:

a) Representar gráficamente $\mathcal{S}$.

b) Hallar los flujos de F y de $\operatorname{rot} F$ a través de $\mathcal{S}$ en la dirección creciente de las z .
